Kazi Sándor
KAZI(AT)CS.BME.HU

Bonyolultságelmélet I.

1. Irányítatlan gráf tárolására adjunk meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:
   - ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot
   - ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet
   - VANÚT(u, v): igen értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig nem értéket

   Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen O(log n). Más műveletre nem kell számítani.
2. Hogyan definiáljuk a P, NP és a $coNP$ osztályokat?

NP-teljes (emlékeztető) (matematikailag nem feltétlenül korrekt):

3-SZÍN	G: G egy irányítatlan egyszerű gráf, aminek csúcsai kiszínezhetők 3 színnel
MAXFTLEN	(G, k): G egy gráf, amiben van k darab független pont
MAXKLIKK	(G, k): G egy gráf, amiben van k pontú teljes részgráf
H	G: G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-kör
Hút	G: G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-út
stHút	G: G irányítatlan gráf, van benne Hamilton-út s-ből t-be
3DH	$(A, B, C; F_1, \ldots, F_n)$: létezik olyan F-sorozat, hogy $A \cup B \cup C$ minden elemét pontosan egyszer fedik le
X3C	$(A; F_1, F_2, \ldots, F_n)$: A lefedhető pontosan egyszeresen egyes F_i halmazokat használva.
PARTÍCIÓ	$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$: két részre bontható, hogy a két rész összege egyenlő
RH	$(s_1, s_2, \ldots, s_n; b)$: van részhalmaz, aminek az összege b
HÁTIZSÁK	$(s_1, \ldots, s_n; v_1, \ldots, v_n; b, k)$: van olyan indexhalmaz, hogy $\sum s \leq b$ és $\sum v \geq k$
RÉSZGRÁFIZO	(G_1, G_2): amelyre $\exists G' \leq G_2$, és $G' \simeq G_1$
EP	igaz az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszer, x egész vektor, mennyi cx skalárszorzat maximális értéke

3. Mondjunk példát olyan gráfra, amely nem színezhető 3 színnel, de a klikkszáma legfeljebb 3.
4. Mutassuk meg az alábbi eldötési problémákról, hogy NP-beliek. Melyekről tudjuk belátni, hogy P-ben vannak? Melyekről látjuk, hogy coNP-beliek?
   (a) **Input:** (G, k) ahol G páros gráf, k pozitív egész
   Kérdés: G-ben van-e k élből álló párosítás?
   (b) **Input:** G irányítatlan gráf
   Kérdés: G-ben van-e Euler kör?
   (c) **Input:** (G, k) ahol G irányítatlan gráf, k pozitív egész
   Kérdés: G-ben van-e k darab független pont?
   (d) **Input:** $(s_1, \ldots, s_n, b)$ pozitív egészek, ahol $1 \leq i \leq n$, b pozitív egész
   Kérdés: Ki lehet-e választani néhány s_i-t, melyek összege b?

---

5. Mutassuk meg, hogy alábbi L probléma NP-teljes úgy, hogy visszavezetjük rá a MAXFTLEN ismerten NP-teljes eldöntési problémát:
   L=$\{(G, a, b) : a, b > 0$ egészek, a G gráfnak van $K_{a,b}$ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráf$\}$.
6. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi probléma NP-teljes:
   L=$\{(a_1, \ldots, a_n)$: a_i számok egészek és a számok három részre oszthatók úgy, hogy mindhárom rész összege ugyananyi legyen$\}$.
7. Mutassuk meg, hogy az alábbi L probléma NP-teljes:
   L=$\{G(V, E) : G$ irányítatlan gráf, $|E| \leq 2|V|$, a G gráf színezhető 3 színnel$\}$.
8. Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló eldöntési probléma P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK eldöntési probléma a következő:
   $\{(G, k) | G$ egy síkgráf, amiben van k pontú klikk$\}$.
   Mutassuk meg, hogy ez a probléma NP-teljes, vagy mutassuk meg, hogy P-beli.

9. Karp-redukció segítségével vezesse vissza a H vagy H-ÚT problémák egyikét az alábbi problémára:
   a) Adott G irányítatlan gráf és $u, v \in V(G)$ csúcsok esetén van-e u-ból v-be vezető Hamilton-út?
   b) Adott G gráfban van-e olyan feszítőfa, aminek a maximális foka 2?
   c) Adott G gráfban van-e olyan feszítőfa, aminek a maximális foka 3?
   d) Adott G gráfban van-e $|V(G)|/100$ hosszú kör?
   e) Adott G gráfban van-e $\sqrt{|V(G)|}$ hosszú kör?

10. Igazoljuk, hogy a következő eldöntési probléma P-beli:
    Adott egy G gráf és egy $S \subseteq V(G)$ halmaz. Van-e G-nek olyan feszítőfája, melynek végpontjai (elsőfokú pontjai) között S pontjai mind szerepelnek?

11. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó problémát és lássuk be róla, hogy P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes.

12. Egy hivatal új épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy meg lehet-e oldani a költözést úgy, hogy egyetlen részleg se legyen szétvágva több részre, azaz teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Igazolja, hogy a probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes.

13. Jelölje L_1 az írányított összefüggő gráfokból álló eldöntési problémát (nyelvet) és L_2 a Hamilton-kört tartalmazó gráfokból álló eldöntési problémát. Lehetséges-e, hogy $L_1 \prec L_2$ illetve, hogy $L_2 \prec L_1$? Ha nem, miért nem? Ha igen, milyen feltétellel?

14. Igazoljuk, hogy ha $coNP \neq NP$, akkor $MAXKLIKK \notin P$.

15. Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik, hogy az X eldöntési probléma **nem** P-beli?
    (a) Egy NP-teljes Y problémára X Karp-redukálható.
    (b) Egy NP-teljes Y probléma X-re Karp-redukálható.
    (c) Az X probléma NP-beli.

Az alábbi problémáknak határozzuk meg a bonyolultságát!

16. **Input:** G gráf és $S \subseteq V(G)$ **Kérdés:** Létezik-e olyan G-beli kör, ami S minden pontján átmegy?

17. **Input:** G gráf és $S \subseteq V(G)$ **Kérdés:** Létezik-e olyan G-beli kör, melynek minden pontja S-beli?

18. **Input:** Összefüggő, $n = 5k$ pontú gráf **Kérdés:** Van-e G-ben pontosan k hosszú kör?

19. **Input:** G gráf és $e \in E(G)$ **Kérdés:** Van-e G-ben olyan kör, mely e-t tartalmazza?

20. **Input:** G gráf **Kérdés:** Kiszínezhető-e G száz színnel?

21. **Input:** G gráf és $x, y, z \in V(G)$ **Kérdés:** Kiszínezhetőek-e G pontjai három színnel jól úgy, hogy x, y és z különböző színű legyen?

22. **Input:** G gráf **Kérdés:** Van-e G-ben 1000 független pont?

23. **Input:** G gráf **Kérdés:** Van-e G-ben legalább 1000 hosszú kör?

24. **Input:** G gráf **Kérdés:** Igaz-e, hogy G bármely két pontján át vezet kör?

25. Mutassa meg, hogy a részhalmazösszeg eldöntési probléma alábbi változata P-beli
    Input: $(s_1, \ldots, s_n; b)$, s_i, b egészek, $0 < s_i < n^2, 0 < b$
    Kérdés: Igaz-e, hogy $\exists I \subseteq \{1, \ldots, n\}$. hogy $\sum_{i \in I} s_i = b$}?

26. Jelölje H a Hamilton-kör eldöntési problémát , 2KÖR pedig azt, hogy egy adott irányítatlan gráf csúcsai lefedhető-e két darab, közös pontot nem tartalmazó körrel. Igazolja, hogy létezik
    (a) H $\prec$ 2KÖR Karp-redukció
    (b) 2KÖR $\prec$ H Karp-redukció.

27. Igazolja, hogy ha egy X eldöntési probléma NP-teljes és $NP \cap coNP$-beli is, akkor NP=coNP.