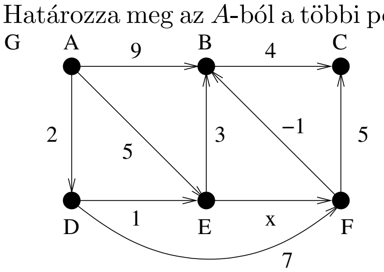
Kazi Sándor
KAZI(AT)CS.BME.HU

# DFS - Leghosszabb utak (DAG) - Minimális feszítőfák

1. Éllistájukkal adottak az alábbi $G_1$ és $G_2$ irányított gráfok (zárójelben az élsúlyok).
   $G_1$: a:b(3),c(8); b:d(-7); c:d(5); d:e(2); e:a(-10);
   $G_2$: a:g(2),f(10); b:a(-2),g(1); c:-; d:-; e:c(5),d(6); f:e(7); g:f(1), e(8);
   (a) Döntsük el mélységi bejárás segítségével, hogy ezek a gráfok DAG-ok-e!
   (b) Amelyik gráf DAG, abban adjunk meg egy topologikus sorrendet, határozzuk meg az $a$ jelű csúcsból a $c$-be vezető legrövidebb út hosszát és számítsuk ki a gráfban levő leghosszabb út hosszát is.

2. Határozza meg az $A$-ból a többi pontba vezető leghosszabb utak hosszát az alábbi $G$ gráfban az $x$ valós paraméter függvényében!




3. Adott egy pozitív egészekből álló $x_1, x_2, \dots, x_n$ sorozat. Keressük a legnagyobb olyan számot, ami megkapható a sorozat egy $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ részsorozatának váltakozó előjeles összegéből. Azaz $x_{i_1} - x_{i_2} + \dots \pm x_{i_k}$ lehetséges összegek közül a maximális értéke a kérdés. Szeretnénk a kérdésre választ adó $O(n)$ lépésszámú algoritmust. (PZH 2011. ősz)

4. Egy $n$ csúcsú irányított gráf mélységi bejárása során azt tapasztaltuk, hogy minden csúcsra a befejezési és a mélységi szám különbsége kisebb mint $(n-4)/4$. Igazoljuk, hogy a gráf erősen összefüggő komponenseinek száma legalább 4.

5. Hogyan működik Prim, Kruskal illetve Borůvka módszere minimális feszítőfák keresésére? Mit tudunk az algoritmusok lépésszámáról egy $n$ csúcsú, $e$ élű gráfban? Mi a köze a piros-kék algoritmusnak a fenti módszerekhez? Mikor takaros egy színezés?

6. Éllistával adott egy $G$ gráf, melynek $n$ csúcsa és $e$ éle van. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és $k$ közötti egész szám (címke). Találjunk (ha létezik) olyan *tarka* utat a gráfban, amelyben minden $1 \le i \le k$ címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(k!(e+n))$.

7. Egy irányított $G$ gráfban hagyjuk el a forrásokat és a nyelőket. A maradék gráfban ismét hagyjuk el a forrásokat és a nyelőket, ezt ismételjük, amig lehet. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor kapunk üres gráfot, ha $G$-ben nincs irányított kör!

8. Mátrixával adott egy $G$ irányítatlan súlyozott gráf. Adott még a $G$-nek egy $F$ minimális súlyú feszítőfája, és az $F$-nek egy $f$ éle. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az $f$ él súlyát meddig lehet úgy felemelni, hogy az $F$ a gráf minimális feszítőfája maradjon.

9. $G$ irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben jelölve a súlyokat, az éleket mindkét irányból felsorolva):
   $a$: $b(2), c(3)$; $b$: $a(2), d(3)$; $c$: $a(3), d(2)$; $d$: $b(3), c(2), e(4), f(2)$;
   $e$: $d(4), f(1), g(2)$; $f$: $d(2), e(1), g(1), h(3)$; $g$: $e(2), f(3), h(4)$; $h$: $f(3), g(4)$;
   (a) Prim módszerével minimális költségű feszítőfát! ($a$-ból indulva)
   (b) Kruskal módszerével minimális költségű feszítőfát!
   (c) Borůvka módszerével minimális költségű feszítőfát! ($a$-ból, $e$-ből és $h$-ból indulva)
   (d) $a$-ból kiinduló mélységi feszítőfát!
   (e) $a$-ból kiinduló szélességi feszítőfát!

10. A szoftverpiacon $n$ féle grafikus formátum közötti oda-vissza konverzióra használatos programok kaphatók: az $i$-edik és a $j$-edik között oda-vissza fordító program ára $a_{ij}$, futási ideje pedig $t_{ij}$ (ha létezik).
    (a) Javasoljunk módszert annak megtervezésére, hogy minden egyes formátumról a saját grafikus terminálunk által megértett formátumra a lehető leggyorsabban konvertáljunk! (Az ár nem számít.)
    (b) Javasoljunk módszert annak eldöntésére, hogy mely programokat vásároljuk meg, ha azt szeretnénk a lehető legolcsóbban megoldani, hogy a megvett programok segítségével bármelyik formátumról bármelyik más formátumra képesek legyünk konvertálni. (Itt a futási idő nem számít).

11. Legyen adva egy (egyszerű, irányítatlan, összefüggő) $n$ pontú $G$ gráf éllistával, az élek súlyozásával együtt. Tegyük fel, hogy a $G$-ből a $v_1$ csúcs, valamint a $v_1$-re illeszkedő élek elhagyásával keletkező $G'$ gráf még mindig összefüggő, és adott $G'$ egy minimális költségű feszítőfája. Adjunk minél hatékonyabb algoritmust a $G$ gráf egy minimális költségű feszítőfájának az elkészítésére! (Teljes értékű megoldás: $O(n \log n)$ idejű algoritmus.)

12. Éllistával adott egy összefüggő, egyszerű, irányítatlan $G$ gráf csupa különböző élsúlyokkal. Jelöljük $n$-nel a csúcsok, $e$-vel pedig az élek számát. Mutassunk egy lineáris (azaz $O(e)$) uniform költségű algoritmust, ami a $G$ gráf egy minimális feszítőfájának $[2n/3]$ élét előállítja! (Egy olyan $[2n/3]$ elemszámú élhalmazt keresünk, ami biztosan része egy minimális költségű feszítőfának.)

13. Legyen adott egy $n \times n$ pixelből álló fekete-fehér kép. Szeretnénk a képen a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig egy jobbra-lefele haladó határvonalat húzni úgy, hogy a vonaltól jobbra-felfele eső fekete, valamint a vonaltól balra-lefele eső fehér pixelek számának az összege a lehető legkisebb legyen. Oldjuk meg ezt a feladatot $O(n^2)$ időben!