Kazi Sándor
KAZI(AT)CS.BME.HU

Dinamikus programozás – Legrövidebb utak gráfokban

1. Adjunk algoritmust, ami egy n csúcsú fában lineáris időben meghatározza a fában levő leghosszabb út hosszát.

2. Legyen F egy n csúcsú fa, tetszőleges v csúcsának súlya pedig $s(v)$. Adjunk polinom idejű algoritmust, amely meghatározza az F fában található legnagyobb összsúlyú független ponthalmaz súlyát.

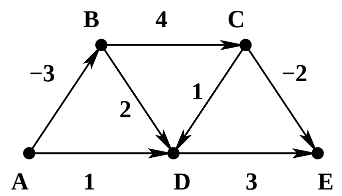
3. Adottak $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tárgyak, az i-edik tárgy súlya egy s_i egész szám ($0 < s_i < 100$). Ezeket a tárgyakat a sorrendet megőrizve (azaz mindig csak a soron következő elemet elhelyezve) ládákba kell pakolnunk, minden ládába összesen legfeljebb 100 súlyú tárgyakat rakhatunk. Minden láda után adót kell fizetnünk: ha egy ládába s összsúlyú tárgyakat rakunk, akkor $(100 - s)^2$ gyémántfélkrajcárt kell fizetnünk. Adjunk algoritmust, amely meghatároz egy legolcsóbb pakolást $O(n^2)$ időben!

4. Éllistával adott a súlyozott élű $G = (V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az 1,2,3 számok közül valók. Javasoljunk $O(n + e)$ uniform költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására. (Itt n a G gráf csúcsainak, e pedig az éleinek a száma.)

5. Legyen $G = (V, E)$ mátrixszal adott n-pontú, súlyozott élű irányított gráf. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G-beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk $O(n^2)$ költségű módszert az $1 \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására.

6. Miért gondolhatjuk naivan azt, hogy a Bellman-Ford algoritmus nem jó semmire, ha ismerjük a Floyd-algoritmust? Miért NEM igaz ez?

7. Határozzuk meg az A csúcsból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát az alábbi gráfban:



8. A 7. feladatban szereplő gráfban határozzuk meg Floyd módszerével az összes pontpárra a legrövidebb utak hosszát!

9. *(Warshall)* Hogyan határozhatnánk meg hatékonyan, hogy egy G gráf mely csúcsai között fut irányított él? (Az ezt reprezentáló gráfot a G tranzitív lezártjának nevezzük.)

10. Vegyük az a gráfot, amelyet a 7. feladatban szereplő gráfból úgy kapunk, hogy a negatív élsúlyokat az ellentettjükre cseréljük. Határozzuk meg a legrövidebb út összsúlyát az A csúcsból mindenhová Dijkstra-módszerével.

11. Vidéken autózunk, ahol benzinkút csak bizonyos falvakban van. Az A falubeli benzinkúttól indulunk és a B faluba akarunk elérni (ahol szintén van benzinkút). A falvak közötti utakat egy n csúcsú e élű, összefüggő, irányítatlan gráf írja le, melynek csúcsai a falvak, az élek pedig a falvak közötti utakat jelentik, egy él súlya a két falut összekötő útszakasz hossza. A gráf az éllistájával adott, és ezen kívül adott még az a k falu, amelyben van benzinkút. Adjon $O(k \cdot e \cdot \log n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza az A-ból B-be vivő legrövidebb olyan útvonalat, melynek során soha nem kell 600 kilométernél többet autóznunk két benzinkút között.

12. Milyen x és y értékekre lesz használható a Dijkstra-, a Bellmann-Ford- illetve a Floyd-algoritmus az alábbi gráfban? Az értékek ismeretében $x = -100$ és $y = 0$ értékekkel számoljuk ki a legrövidebb utakat E-ből, majd C-ből és F-ből mindenhová máshová, minél kevesebb számítással. Hogyan használhatjuk a Dijkstra-algoritmust?