Grundlagen der theoretischen Informatik

Vorlesung 9:
Planarität

Planarität

Definition

Ein Graph ist *planar (síkbarajzolható)*, wenn er eine planare Zeichnung hat, d.h. wenn er in der Ebene gezeichnet werden kann, ohne dass die Kanten sich schneiden würden. Die planare Zeichnung des Graphen teilt die Ebene (sík) in *Gebiete (lap, tartomány)*. Die Anzahl der Gebiete wird mit g bezeichnet.

Eines der Gebiete ist unbeschränkt, alle anderen sind beschränkt (korlátos).

Satz

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er auf die Oberfläche einer Kugel gezeichnet werden kann, ohne dass die Kanten sich schneiden würden.

Beweisskizze. Die Kugel wird auf die Ebene gestellt; der Berührungspunkt sei der Südpol. Wir definieren eine eineindeutige Abbildung zwischen den Punkten der Ebene und den Punkten der Kugeloberfläche ausser des Nordpols (stereographische Projektion aus dem Nordpol). Das Bild eines Punktes P der Ebene erhält man, indem man P und den Nordpol mit einer Gerade verbindet; diese Gerade schneidet die Kugeloberfläche in genau einem weiteren Punkt, der das Bild P_0 ist. Ähnlicherweise, um das Bild eines Punktes Q der Kugeloberfläche zu bestimmen, verbindet man Q und den Nordpol mit einer Gerade; diese Gerade schneidet die Ebene in genau einem Punkt, der das Bild Q_1 ist.
Wenn der Graph kreuzungsfrei in der Ebene gezeichnet ist, dann liefert die stereographische Projektion eine kreuzungsfreie Zeichnung auf der Kugeloberfläche und umgekehrt, wenn der Graph kreuzungsfrei auf der Kugeloberfläche gezeichnet ist, dann liefert die stereographische Projektion eine kreuzungsfreie Zeichnung in der Ebene,

Satz (Euler-Formel)

Für einen zusammenhängenden planaren Graphen mit n Knoten, m Kanten und g Gebiete gilt: $m + 2 = n + g$.

Beweis. Betrachten wir eine konkrete planare Zeichnung des Graphen. Da der Graph zusammenhängend ist, gilt $m \geq n - 1$. Für gegebenes n wenden wir vollständige Induktion nach m an. Wenn $m = n - 1$, ist der Graph ein Baum, also gilt $g = 1$ und damit $m + 2 = n - 1 + 2 = n + 1 = n + g$.

Sei jetzt $m > n - 1$ und nehmen wir an, dass der Satz für alle Graphen mit n Knoten und weniger als m Kanten bereits bewiesen wurde. Da $m > n - 1$, enthält der Graph einen Kreis. Sei e eine Kante in diesem Kreis. Dann gehört e zum Rand von genau zwei Gebieten. Entfernt man die Kante e, so werden diese Gebiete vereinigt, also hat der so entstehende Graph $n_0 = n$ Knoten, $m_0 = m - 1$ Kanten und $g_0 = g - 1$ Gebiete (in seiner aktuell betrachteten planaren Zeichnung). Laut Induktionsbedingung ist $m_0 + 2 = n_0 + g_0$. Daraus folgt

$m + 2 = m_0 + 3 = n_0 + g_0 + 1 = n + g$.

Satz (Euler-Formel für nicht zusammenhängende Graphen).

Für einen planaren Graphen mit c Komponenten gilt:
$m + c + 1 = n + g$.

Korollar

Bei einem planaren Graphen hängt g nur vom Graphen ab, nicht von der planaren Zeichnung.

Lemma

Sei G ein planarer Graph, der mindestens einen Kreis enthält und in dem jeder Kreis aus mindestens t Kanten besteht. Dann besteht der Rand jedes Gebietes in jeder planaren Zeichnung des Graphen aus mindestens t Kanten.

Satz

Sei G ein einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$. Dann gilt $m \leq 3n - 6$.

Beweis. Wenn G kreisfrei ist, dann ist $m \leq n - 1$, was für $n \geq 3$ kleiner ist als $3n - 6$.
Sonst enthält G mindestens einen Kreis und da der Graph einfach ist, besteht jeder Kreis aus mindestens 3 Kanten. Betrachten wir eine planare Zeichnung des Graphen. Seien die Gebiete $A_1, A_2, \ldots, A_g$ und für jedes i bezeichne a_i die Anzahl der Kanten, aus denen der Rand von A_i besteht. $a_i \geq 3$ für jedes i. Daher gilt $\sum a_i \geq 3g$. Andererseits gehört jede Kante des Graphen zum Rand von höchstens zwei Gebieten. Damit gilt $\sum a_i \leq 2m$. Aus diesen beiden Ungleichungen folgt $3g \leq 2m$. Andererseits $g = m - n + c + 1 \geq m - n + 2$. Zusammen ergibt das $3(m - n + 2) \leq 2m$ und damit $m \leq 3n - 6$.

Korollar

K_5 ist nicht planar.

Satz

Sei G ein einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ und in dem jeder Kreis aus mindestens 4 Kanten besteht. Dann gilt $m \leq 2n - 4$.

Korollar

$K_{3,3}$ ist nicht planar.

K_5 und $K_{3,3}$ sind die *Kuratowski-Graphen*.

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, X eine nicht leere Menge mit $X \cap V = \emptyset$. Den Graphen $G_0 = (V \cup X, E_0)$ konstruiert man aus G, indem man einige Kanten von G durch Wege ersetzt, wobei die inneren Knoten dieser Wege aus X stammen und jedes Element von X in genau einem solchen Weg enthalten ist. Dann ist G_0 eine *Unterteilung (felosztás)* von G.

Definition

Der Graph H ist ein *topologischer Minor* des Graphen G, wenn es eine Unterteilung von H gibt, die mit einem Teilgraphen von G isomorph ist.

Satz

Wenn H ein topologischer Minor von G ist und H nicht planar ist, dann ist G auch nicht planar.

Beweis. Sei H_0 der Teilgraph von G, der mit einer Unterteilung von H isomorph ist. Wenn G planar wäre, dann wäre H_0 auch planar und H damit auch.

Korollar

Wenn ein Graph K_5 oder $K_{3,3}$ als topologischen Minor hat, ist er nicht planar.

Satz (Kuratowski)

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als topologischen Minor hat.

Satz (Fáry-Wagner)

Wenn ein Graph planar ist, dann hat er eine planare Zeichnung, in der jede Kante eine gerade Linie ist.

Dualität

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph. Sein *dualer Graph* $G^\star = (V^\star, E^\star)$ wird wie folgt konstruiert. $V^\star$ besteht aus den Gebieten von G. Wenn die Kante $e \in E$ zum Rand von zwei Gebieten gehört, dann gibt es eine Kante $e^\star \in E^\star$ zwischen den entsprechenden Knoten von $G^\star$. (Wenn es mehrere Kanten gibt, die zum Rand von zwei gegebenen Gebieten gehören, dann sind die entsprechenden Knoten in $G^\star$ durch mehrere Parallelkanten verbunden.) Wenn die Kante $e \in E$ zum Rand von nur einem Gebiet gehört, dann gibt es eine Schlinge $e^\star \in E^\star$, die zum entsprechenden Knoten von $G^\star$ inzident ist.

Satz

Sei G ein planarer Graph. Dann ist $G^\star$ planar und zusammenhängend.

Sei G planar und $G^\star$ sein Dual. Seien $n^\star, e^\star, g^\star$ die Anzahl der Knoten/Kanten/Gebiete in $G^\star$. Dann:
$n^\star = g$, $e^\star = e$, $g^\star = n$.

Bemerkung

Die Notation $G^\star$ ist etwas irreführend, weil $G^\star$ nicht vom Graphen G, sondern von seiner planaren Zeichnung abhängt. Die dualen Graphen, die zu den verschiedenen planaren Zeichnungen eines Graphen gehören, sind nicht notwendigerweise isomorph.

Definition

Eine Kantenmenge $Q \subseteq E(G)$ ist ein *Schnitt* falls $G - Q$ mehrere Komponente als G hat aber Q hat keine Teilmenge mit dieser Eigenschaft. $e \in E$ ist eine *Brücke (híd)*, wenn $\{e\}$ eine Schnittmenge ist.

Satz

Sei G ein planarer Graph, in dem die Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ einen Kreis bilden. Dann bilden die Kanten $e_1^\star, e_2^\star, \ldots, e_k^\star$ einen minimalen Schnitt in $G^\star$. Umgekehrt, wenn $e_1, e_2, \ldots, e_k$ einen minimalen Schnitt von G bilden, dann bilden $e_1^\star, e_2^\star, \ldots, e_k^\star$ einen Kreis in $G^\star$.

Korollar

Sei G ein planarer Graph, e eine Schlinge. Dann ist $e^\star$ eine Brücke in $G^\star$. Umgekehrt, wenn e eine Brücke in G ist, dann ist $e^\star$ eine Schlinge in $G^\star$.

Satz (Vierfarbensatz, Appel-Haken)

Jeder planare Graph ist mit 4 Farben färbbar