# Grundlagen der theoretischen Informatik

## Vorlesung 8:
## Paarungen

# Paarungen

## Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $M \subseteq E$ ist eine *Paarung (párosítás))* (auch *Matching* oder *unabhängige Kantenmenge (független élhalmaz)* genannt), wenn es kein Paar von Kanten in $M$ gibt, die zu demselben Knoten inzident sind. Die Knoten, die zu einer Kante in $M$ inzident sind, sind *gepaart*, die anderen *ungepaart*.

## Definition

Sei $M$ eine Paarung in $G = (V, E)$. $M$ ist eine *maximale Paarung (maximális párosítás)*, wenn für $\forall e \in E \setminus M$ die Menge $M + e$ keine Paarung ist.

$M$ ist eine *Paarung maximaler Mächtigkeit (maximális méretü párosítás)*, wenn $|M|$ unter den Paarungen von $G$ maximal ist. Die größte Mächtigkeit einer Paarung in $G$ wird mit $\nu(G)$ bezeichnet.

### Definition

$M$ ist eine *vollständige Paarung (teljes párosítás)*, wenn alle Knoten gepaart sind.

### Definition

Sei $M$ eine Paarung im Graphen $G$. Der Weg $W$ mit der Knotenfolge $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ ist ein *alternierender Weg (alternáló út)* hinsichtlich $M$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $v_i v_{i+1} \in M$ für $i = 1, 3, 5, \ldots$ und $v_i v_{i+1} \notin M$ für $i = 0, 2, 4, \ldots$ Wenn zudem $k$ ungerade ist und $v_0$ und $v_k$ ungepaart sind, dann ist $W$ ein Verbesserungsweg.

## Satz (Berge)

Sei $M$ eine Paarung im Graphen $G$. $M$ ist dann und nur dann eine Paarung maximaler Mächtigkeit, wenn es keinen Verbesserungsweg gibt.

*Beweis.* Nehmen wir zuerst an, dass $M$ eine Paarung maximaler Mächtigkeit ist. Nehmen wir indirekt an, es gibt trotzdem einen Verbesserungsweg $W$. Bezeichne $E(W)$ die Kanten in $W$ und betrachten wir die symmetrische Differenz $M_0 = M \triangle E(W)$. $M_0$ wäre dann eine Paarung größerer Mächtigkeit als $M$.

Nun nehmen wir an, dass es keinen Verbesserungsweg gibt. Nehmen wir indirekt an, es gibt eine Paarung $M_0$ mit $|M_0| > |M|$. Betrachten wir den Graphen $G_0 = (V, M \cup M_0)$. Da zu einem Knoten höchstens eine Kante in $M$ und höchstens eine Kante in $M_0$ inzident ist, hat jeder Knoten in $G_0$ höchstens zwei Nachbarn. Dann ist jede Komponente von $G_0$ ein isolierter Knoten, ein Weg oder ein Kreis.

Schauen wir uns diese Komponenten an. Bei Wegen und Kreisen gilt: Da $M$ und $M_0$ Paarungen sind, können nicht mehrere Kanten aus $M$ oder mehrere Kanten aus $M_0$ nebeneinander sein. D.h. Kanten aus $M$ und $M_0$ alternieren. Folglich sind die Anzahl von $M$-Kanten und $M_0$-Kanten in einem Kreis gleich. Da $|M_0| > |M|$, muss es also einen Weg geben, in dem es mehr $M_0$-Kanten gibt als $M$-Kanten. Das kann nur sein, wenn die erste und letzte Kante des Weges $M_0$-Kanten sind. Dann ist das aber ein Verbesserungsweg hinsichtlich $M$.

# Paarungen in bipartiten Graphen

## Algorithmus von König

*Input:* Bipartiter Graph $G = (A, B, E)$.
*Output:* Paarung maximaler Mächtigkeit in $G$.
*Ablauf:* Initialisierung: $M = \emptyset$.
In einer allgemeinen Iteration sucht man einen Verbesserungsweg (mit einer modifizierten Breitensuche).
Wenn man einen Verbesserungsweg $W$ gefunden hat; dann sei $M^{neu} = M \triangle W$ und die nächste Iteration kann beginnen.
Hat man in einer Iteration bis zum Ende der Breitensuche keinen Verbesserungsweg gefunden, terminiert der Algorithmus mit $M$ als Output.

## Lemma

Sei $G = (A, B, E)$ ein bipartiter Graph. Sei $M$ eine Paarung maximaler Mächtigkeit. Bezeichne $A_1$ ($B_1$) die ungepaarten Knoten in $A$ (in $B$). Sei $A_2$ ($B_2$) die Menge der Knoten in $A$ (in $B$), die aus $A_1$ über einen alternierenden Weg erreichbar sind. Sei $A_3 = A \setminus (A_1 \cup A_2)$ und $B_3 = B \setminus (B_1 \cup B_2)$. Dann gelten folgende Eigenschaften:
(1) Die Knoten in $A_1$ können nur mit Knoten in $B_2$ benachbart sein.
(2) Die Knoten in $A_2$ können nur mit Knoten in $B_2$ benachbart sein.

*Beweis.*
(1) Sei $ab \in E$ eime Kante mit $a \in A_1$ und $b \in B$. Dann $b \in B$ folgt weil eine Kante $ab$ ein alternierender Weg der Länge 1 ist.
(2) Sei $a \in A_2$ und $ab \in E$ eime Kante. Nehmen wir indirekt an, dass $b \notin B_2$. Da $a \in A_2$, gibt es einen alternierenden Weg $W$ von einem Knoten $a_0$ zu $a$. $W + ab$ ist eim Weg von $a_0$ zu $b$ so $b \in B_2$. Das ist ein Wiederspruch.

**Definition**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $X \subseteq V$. $N(X)$ bezeichnet die Menge der Knoten, die mit mindestens einem Knoten in $X$ benachbart sind.

**Satz (Hall)**

In einem bipartiten Graphen $G = (A, B, E)$ gibt es dann und nur dann eine Paarung, bei der alle Knoten von $A$ gepaart sind, wenn für alle $X \subseteq A$ gilt, dass $|N(X)| \geq |X|$ (Hall-Bedingung).

*Beweis.* Wenn es eine Paarung $M$ gibt, bei der alle Knoten von $A$ gepaart sind, dann gilt natürlich für alle $X \subseteq A$: $|N(X)| \geq |X|$. Nehmen wir nun an, es gibt keine solche Paarung. Sei $M$ eine Paarung maximaler Mächtigkeit. Da durch $M$ nicht alle Knoten von $A$ gepaart sind, $A_1 \neq \emptyset$. Wir haben $N(A_1 \cup A_2) = B_2$ und $|A_1 \cup A_2| > |B_2|$ was der Hall-Bedingung widerspricht.

**Satz (Frobenius)**

Im einem bipartiten Graphen $G = (A, B, E)$ gibt es dann und nur dann eine vollständige Paarung, wenn $|A| = |B|$ und für alle $X \subseteq A$ gilt, dass $|N(X)| \geq |X|$.

*Beweis.* Die Notwendigkeit beider Bedingungen ist trivial. Umgekehrt, wenn die Bedingungen erfüllt sind, folgt aus dem Satz von Hall die Existenz einer Paarung $M$, bei der alle Knoten in $A$ gepaart sind. Da $|A| = |B|$, sind auch alle Knoten von $B$ durch $M$ gepaart.

**Definition**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $U \subseteq V$ ist eine *überdeckende Knotenmenge (lefogoó ponthalmaz)*, wenn jede Kante von $G$ zu mindestens einem Knoten in $U$ inzident ist. Die kleinste Mächtigkeit einer überdeckenden Knotenmenge in $G$ wird mit $\tau(G)$ bezeichnet.

### Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $X \subseteq V$ ist eine *unabhängige Knotenmenge (független/stabil csúcshalmaz)*, wenn keine Kante in $X$ läuft, d.h. wenn $x, y \in X$, dann gilt $xy \notin E$. Die größte Mächtigkeit einer unabhängigen Knotenmenge in $G$ wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet

### Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne isolierte Knoten. $F \subseteq E$ ist eine *überdeckende Kantenmenge (lefogó élhalmaz)*, wenn jeder Knoten von $G$ zu mindestens einer Kante in $F$ inzident ist. Die kleinste Mächtigkeit einer überdeckenden Kantenmenge in $G$ wird mit $\rho(G)$ bezeichnet.

**Satz**

Für jeden Graphen G gilt: $\nu(G) \leq \tau(G)$.

*Beweis.* Sei $M$ eine unabhängige Kantenmenge mit $|M| = \nu(G)$. Um die Kanten in $M$ zu überdecken, braucht man schon $|M|$ Knoten, daher gilt $\tau(G) \geq |M|$.

**Satz**

Für jeden Graphen $G$ ohne isolierte Knoten gilt: $\alpha(G) \leq \rho(G)$.

*Beweis.* Sei $X$ eine unabhängige Knotenmenge mit $|X| = \alpha(G)$. Um die Knoten in $X$ zu überdecken, braucht man schon $|X|$ Kanten, daher gilt $\alpha(G) \leq \rho(G)$.

**Lemma**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $X \subseteq V$. Dann ist $X$ genau dann eine unabhängige Knotenmenge, wenn $V \setminus X$ eine überdeckende Knotenmenge ist.

*Beweis.* Wenn $X$ unabhängig ist, dann muss mindestens ein Endknoten jeder Kante in $V \setminus X$ liegen, d.h. $V \setminus X$ ist überdeckend. Umgekehrt, wenn $X \subseteq V$ überdeckend ist, dann muss mindestens ein Endknoten jeder Kante in $V \setminus X$ liegen, d.h. $X$ ist unabhängig.

**Satz (Gallai)**

Für jeden Graphen $G$ gilt: $\alpha(G) + \tau(G) = n$.

*Beweis.* Sei $X$ eine unabhängige Knotenmenge mit $|X| = \alpha(G)$. Dann $V \setminus X$ ist eine überdeckende Knotenmenge mit $n - \alpha(G)$ Knoten. Daraus folgt $\tau(G) \leq n - \alpha(G)$, also $\alpha(G) + \tau(G) \leq n$. Sei $Y$ eine überdeckende Knotenmenge mit $|Y| = \tau(G)$. Dann $V \setminus X$ ist eine unabhängige Knotenmenge mit $n - \tau(G)$ Knoten. Daraus folgt $\alpha(G) \geq n - \tau(G)$, also $\alpha(G) + \tau(G) \geq n$.

**Satz (Gallai)**

Für jeden Graphen $G$ ohne isolierte Knoten gilt: $\nu(G) + \rho(G) = n$.

**Satz (König)**

Sei $G$ ein bipartiter Graph. Dann gilt $\nu(G) = \tau(G)$. Wenn $G$ keinen isolierten Knoten enthält, gilt zudem auch $\alpha(G) = \rho(G)$.