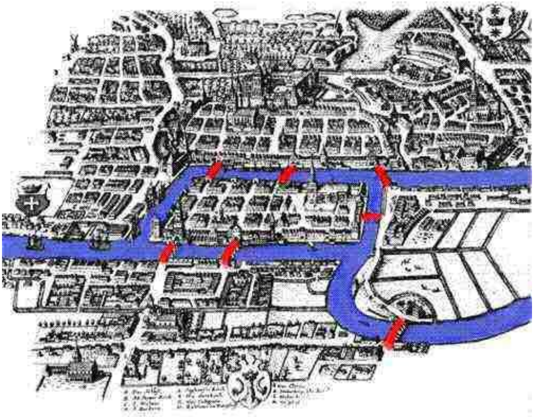
Grundlagen der theoretischen Informatik

Vorlesung 6:

Eulersche, Hamiltonsche Kreise und Wege

Die sieben Brücken von Königsberg



Eulersche Kreise und Wege

Definition

In einem ungerichteten – nicht unbedingt einfachen – Graphen G wird eine geschlossene Kantenzug, die jede Kante des Graphen genau einmal durchläuft, *Eulerscher Kreis (Euler-kör)* genannt.

Ein Eulerscher Kreis ist nicht unbedingt ein Kreis, weil er einen Knoten auch mehrfach durchlaufen kann.

Satz (Euler)

Sei G ein ungerichteter Graph ohne isolierten Knoten. G hat genau dann einen Eulerschen Kreis, falls er zusammenhängend ist und $d(v)$ für alle $v \in V$ gerade (páros) ist.

Beweis. Falls ein Graph G einen Eulerschen Kreis hat, ist es trivial, dass G zusammenhängend ist und alle Knoten in G gerade Gradzahl haben.

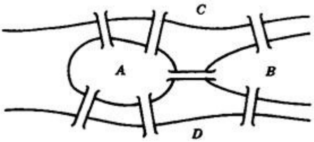
Falls der Graph zusammenhängend ist und $d(v)$ für alle $v \in V$ gerade ist, kann man mit dem folgenden Algorithmus einen Eulerschen Kreis finden.
Man startet in einem beliebigen Knoten v_0.
Da es keinen isolierten Knoten gibt, existiert eine Kante $e_1 = v_0 v_1$.
Da die Gradzahl von v_1 gerade ist, kann man aus v_1 wieder über eine neue, bisher unbesuchte Kante $e_2 = v_1 v_2$ weitergehen, usw.
Im Allgemeinen, wenn wir gerade in einem Knoten v_i sind, den die Kantenfolge schon k-mal erreicht und $k-1$-mal verlassen hat, dann gibt es außer diesen $2k-1$ Kanten mindestens noch eine weitere zu v_i inzidente Kante, über die die Kantenfolge fortgesetzt werden kann, da die Gradzahl von v_i gerade ist. Dieses Verfahren kann nur dann terminieren, wenn wieder der Anfangsknoten v_0 erreicht wird. Somit wurde eine geschlossene Kantenzug gefunden, die jede Kante höchstens einmal durchläuft.

Wenn es keine weiteren Kanten gibt, ist das ein Eulerscher Kreis. Sonst - da G zusammenhängend ist - gibt es einen schon besuchten Knoten v_i, zu dem eine bisher noch unbesuchte Kante inzident ist. Dann startet das gleiche Verfahren erneut, diesmal aus v_i. Da die früher schon besuchten und damit nicht mehr nutzbaren Kanten die Gradzahl jedes Knotens um eine gerade Zahl verringern, ist es weiterhin wahr, dass die Kantenfolge aus jedem Knoten weitergeführt werden kann, bis letztendlich der Anfangsknoten wieder erreicht wird.

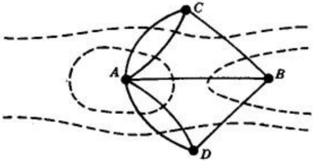
Somit erhält man also eine zweite geschlossene Kantenfolge, die mit der ersten vereinigt werden kann.

Damit ist also eine größere geschlossene Kantenfolge entstanden, die jede Kante höchstens einmal durchläuft.

Dieses Verfahren wird wiederholt bis jede Kante in der Kantenfolge enthalten ist und damit ein Eulerscher Kreis gefunden wurde.



(a) Königsberg in 1736



(b) Euler's graphical representation

Definition

In einem ungerichteten - nicht unbedingt einfachen - Graphen G wird eine offene Kantenzug, die jede Kante des Graphen genau einmal durchläuft, *Eulerscher Weg (Euler-séta)* genannt.

Satz

Sei G ein ungerichteter Graph ohne isolierten Knoten. G hat genau dann einen Eulerschen Weg, falls er zusammenhängend ist und die folgende Eingenschaft besitzt: es gibt 2 Knoten mit ungerader Gradzahl und $n-2$ Knoten mit gerader Gradzahl.

Beweis. Falls ein Graph G einen Eulerschen Weg hat, ist es trivial, dass G zusammenhängend ist, die beiden Endknoten des Eulerschen Weges ungerade Gradzahl haben und die anderen Gradzahlen gerade sind.

Falls der Graph zusammenhängend ist und alle Knoten außer v_1 und v_2 gerade Gradzahl haben, dann haben alle Knoten in $G_0 = G + v_1 v_2$ gerade Gradzahl. Daraus folgt, dass es in G_0 einen Eulerschen Kreis gibt. Ohne $v_1 v_2$ ergibt sich ein Eulerscher Weg in G.

Hamiltonsche Kreise und Wege

Definition

In einem Graphen G wird ein Kreis, der jeden Knoten des Graphen genau einmal durchläuft, *Hamiltonscher Kreis (Hamilton-kör)* genannt.

Definition

In einem Graphen G wird ein Weg, der jeden Knoten des Graphen genau einmal durchläuft, *Hamiltonscher Weg (Hamilton-út)* genannt.

Bemerkung. Im Gegensatz zu Eulerschen Kreisen und Wegen sind Hamiltonsche Kreise und Wege echte Kreise bzw. Wege.

Bemerkung. Kein effizienter Algorithmus ist bekannt, der entscheiden würde, ob ein allgemeiner Graph einen Hamiltonschen Kreis/Weg enthält. Keine einfach überprüfbare Bedingung ist bekannt, die gleichzeitig notwendig (szükséges) und hinreichend (elégséges) für die Existenz eines Hamiltonschen Kreises/Weges

Notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz eines Hamiltonschen Kreises/Weges:

Satz

Wenn ein Graph G einen Hamiltonschen Kreis enthält, ist es für $\forall X \subseteq V(G)$ wahr, dass $c(G - X) \leq |X|$, wobei c die Anzahl der Komponenten bezeichnet.

Beweis. Falls man von einem Kreis k Knoten entfernt, zerfällt der Kreis in k Komponenten, oder weniger, wenn benachbarte Knoten weggelassen werden. Ein Graph, der einen Hamiltonschen Kreis enthält, ist ein Kreis und eventuell hinzugefügte weitere Kanten. Die Anzahl der Komponenten in $G - X$ kann sich durch diese zusätzliche Kanten nur verringen.

Bemerkung: Falls es eine Menge $X \subseteq V(G)$ gibt, die diese Bedingung nicht erfüllt, hat G keinen Hamiltonschen Kreis.

Satz

Wenn ein Graph G einen Hamiltonschen Weg enthält, ist es für $\forall X \subseteq V(G)$ wahr, dass $c(G - X) \leq |X| + 1$, wobei c die Anzahl der Komponenten bezeichnet.

Beweis. Falls man von einem Weg k Knoten entfernt, zerfällt der Weg in $k + 1$ Komponenten, oder weniger, wenn benachbarte Knoten weggelassen werden. Ein Graph, der einen Hamiltonschen Weg enthält, ist ein Weg und eventuell hinzugefügte weitere Kanten. Die Anzahl der Komponenten in $G - X$ kann sich durch diese zusätzliche Kanten nur verringern.

Bemerkung: Falls es eine Menge $X \subseteq V(G)$ gibt, die diese Bedingung nicht erfüllt, hat G keinen Hamiltonschen Weg.

Hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingungen für die Existenz eines Hamiltonschen Kreises:

Satz (Ore)

Sei G ein einfacher Graph, in dem für alle nicht benachbarte Knotenpaare x, y gilt, dass $d(x) + d(y) \geq n$. Dann existiert in G ein Hamiltonscher Kreis.

Beweis. Indirekt, sei G ein Gegenbeispiel mit einer maximalen Anzahl von Kanten. Gegenbeispiel bedeutet, dass die Bedingung bzgl. der Gradzahlen in G erfüllt ist, aber er hat keinen Hamiltonschen Kreis. G hat maximale Anzahl von Kanten, also falls $xy \notin E(G)$, dann ist $G_0 = G + xy$ kein Gegenbeispiel mehr. Die Bedingung des Satzes ist auch für G_0 erfüllt, also bedeutet die Tatsache, dass G_0 kein Gegenbeispiel ist, dass G_0 einen Hamiltonschen Kreis enthält. Daraus ergibt sich ein Hamiltonscher Weg in G zwischen x und y.

Seien die Knoten entlang dieses Hamiltonschen Weges nummeriert $x = v_1, v_2, \ldots, v_n = y$. Nehmen wir eine Kante $xv_i \in E$. $yv_{i-1} \notin E$ muss gelten, sonst gäbe es einen Hamiltonschen Kreis in G. Somit werden aus den $n-1$ möglichen Nachbarn von y $d(x)$ ausgeschlossen. Daraus folgt $d(y) \leq n - 1 - d(x)$, oder umgeformt: $d(x) + d(y) \leq n - 1$. Diese widerspricht der Bedingung des Satzes.

Satz (Dirac)

Sei G ein einfacher Graph, in dem für $\forall v \in V$ gilt, dass $d(v) \geq \frac{n}{2}$. Dann existiert in G ein Hamiltonscher Kreis.

Beweis. Folgt aus dem Satz von Ore.