

Grundlagen der theoretischen Informatik

Übung 6

13. Oktober 2018.

Theorie

Def: In einem ungerichteten - nicht unbedingt einfachen - Graphen G wird eine geschlossene Kantenzug, die jede Kante des Graphen genau einmal durchläuft, *Eulerscher Kreis* genannt.

Satz: Sei G ein ungerichteter Graph ohne isolierten Knoten. G hat genau dann einen Eulerschen Kreis, falls er zusammenhängend ist und $d(v)$ für alle $v \in V$ gerade ist.

Def: In einem ungerichteten - nicht unbedingt einfachen - Graphen G wird eine offene Kantenzug, die jede Kante des Graphen genau einmal durchläuft, *Eulerscher Weg* genannt.

Satz: Sei G ein ungerichteter Graph ohne isolierten Knoten. G hat genau dann einen Eulerschen Weg, falls er zusammenhängend ist und die folgende Eigenschaft besitzt: es gibt 2 Knoten mit ungerader Gradzahl und $n - 2$ Knoten mit gerader Gradzahl.

Def: In einem Graphen G wird ein Kreis (Weg), der jeden Knoten des Graphen genau einmal durchläuft, *Hamiltonscher Kreis (Hamiltonscher Weg)* genannt.

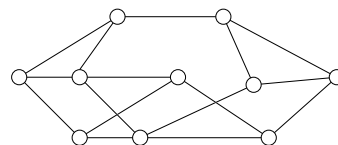
Satz: Wenn ein Graph G einen Hamiltonschen Kreis (Weg) enthält, ist es für $\forall X \subseteq V(G)$ wahr, dass $c(G - X) \leq |X|$ ($c(G - X) \leq |X| + 1$), wobei c die Anzahl der Komponenten bezeichnet.

Satz (Ore): Sei G ein einfacher Graph, in dem für alle nicht benachbarte Knotenpaare x, y gilt, dass $d(x) + d(y) \geq n$. Dann existiert in G ein Hamiltonscher Kreis.

Satz (Dirac): Sei G ein einfacher Graph, in dem für $\forall v \in V$ gilt, dass $d(v) \geq \frac{n}{2}$. Dann existiert in G ein Hamiltonscher Kreis.

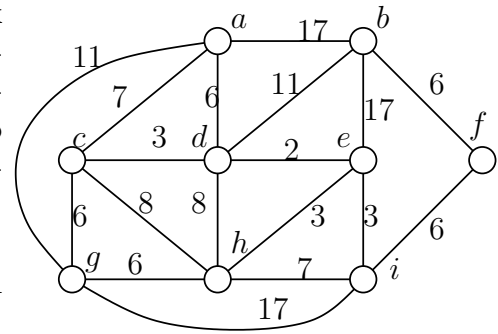
Übungen

1. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, wo $V = \{p_1, p_2, \dots, p_{2001}\}$ und $(p_i p_j \in E(G)) \iff |i - j| \leq 2$. Enthält G einen Eulerschen Weg / Eulerschen Kreis / Hamiltonschen Kreis / Hamiltonschen Weg? (V '01)
2. Seien die Knoten des Graphen G_n die $(0, 1)$ Folgen der Länge n . Zwei Knoten sind genau dann benachbart, falls sie in genau einem Bit verschieden (für $n = 4$ z.B. $(0, 0, 0, 1)$ und $(0, 1, 0, 1)$ sind benachbart). Enthält G_n einen Eulerschen Kreis / Hamiltonschen Kreis? (ZH '01)
3. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph in dem alle Gradzahlen gerade sind. Beweisen Sie, dass E in kantendisjunkte Kreise partitioniert werden kann.
4. Sei G ein 12-regulärer Graph. Beweisen Sie, dass die Kanten von G mit rot und grün so gefärbt werden können, dass alle Knoten mit 6 grüne und 6 rote Kanten inzident sind.
5. Beweisen Sie, dass die Kanten einer beliebigen endlichen ungerichteten Graphen so gerichtet werden können, dass für alle $v \in V$ $|\delta(v) - \rho(v)| \leq 1$ gilt, wo $\delta(v)$ und $\rho(v)$ notieren die Anzahl der ausgehenden und einkommenden Kanten.
6. A mellékelt ábra egy csatornahálózat vázlatos rajzát mutatja. A vonalak a csatornákat jelképezik. Minden egyes csomópontban, ahol csatornák találkoznak, egy-egy létra vezet a felszínre. Nem kizárható, hogy úgynevezett endzsió terroristák egy sátáni terv keretében valahol megmérgezték a hálózatot. Ezért fertőtleníteni kell minden egyes csatornát, aminek az a módja, hogy a közszolgálati csatornák élő közvetítésében beszámolnak arról, amint egy erre a feladatra speciálisan kiképzett szakember súlyos védőfelszerelésben végigkúszik a csöveken.
Mivel a szkakafanderre is tapadhat méreg, a már fertőtlenített szakaszra nem szabad ismételt behatolni. Legalább hányszor kell a szakembernek kievickélnie a csatornából ahhoz, hogy a teljes fertőtlenítést elvégezhesse?
7. Gibt es ein solcher einfacher Graph, der einen Eulerschen Kreis enthält, die Anzahl seiner Knoten ist gerade und die Anzahl seiner Kanten ist ungerade?
8. Beweisen Sie, dass die Kanten eines beliebigen zusammenhängenden Graphen so traversiert werden können, dass alle Kanten zweimal benutzt werden, genau einmal in beider Richtungen.
9. Nehmen wir an, dass im Graphen $G = (V, E)$ alle Gradzahlen gerade sind und sei $X \subseteq V$. Beweisen Sie, dass die Anzahl der Kanten zwischen X und $V \setminus X$ gerade ist.
10. Gibt es ein solcher Graph G mit 222 Knoten der einen Eulerschen Kreis enthält und sein Komplement, $\bar{G}$ enthält auch einen Eulerschen Kreis?



11. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős,

Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült összátvot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat! (*) (ZH '16)



12. Kann ein Springer in einem Schachbrett der Grösse 4×4 so ziehen, dass er auf alle Felde genau einmal tritt? Was ist die Antwort falls der Schachbrett Grösse 8×8 hat?
13. Sei G ein Graph mit $2n$ Knoten der einen Hamiltonschen Kreis enthält. Beweisen sie, dass es aus der Kantenmenge von G ein Paar Kanten so ausgewählt werden können, dass jeder Knoten von G mit genau einem inzident ist.
14. Sei $G = (V, E)$ ein Graph der einen Hamiltonschen Kreis enthält und seien $v \in V$ ein beliebiger Knoten, $e \in E$ eine beliebige Kante. Beweisen Sie, dass $G - v$ und $G - e$ zusammenhängend sind.
15. Sei G ein zusammenhängender Graph und K ein Kreis von G . Nehmen wir an, dass für alle Kanten e von K $K - e$ ein Längster Weg in G ist. Beweisen sie, dass K ein Hamiltonscher Kreis von G ist.
16. Mindestens wie viele Kanten hat ein Graph mit 6 Knoten der einen Hamiltonschen Kreis enthält?
17. Beweisen Sie, dass falls ein 3-regulärer Graph G einen Hamiltonschen Kreis enthält, seine Kanten können mit drei Farben so gefärbt werden, dass zwei Kanten mit der selben Farbe keinen gemeinsamen Endknoten haben.
18. Sei G ein Graph mit $2n$ Knoten. Nehmen wir an, dass alle Knoten in G mindestens n Nachbarn haben. Wir möchten mindestens einen Endknoten jeder Kante auszuwählen. Beweisen Sie, dass wir mindestens n Knoten auswählen sollen. (ZH '99)
19. In einer Gruppe alle zwei Leute haben mindestens zwei gemeinsame Bekannte. Alle zwei Leute kennen einander oder für alle andere die folgende ist wahr: mindestens eins dieser zwei Leute ist sein Bekannt. Beweisen Sie, dass diese Gruppe kann sich um einem Tisch so setzen, dass jeder zwischen zwei von seiner Bekannte sitzt. (ZH '00)
20. Ein einfacher Graph G enthält 20 Knoten und alle seine Gradzahlen sind mindestens 12. Beweisen Sie, dass G zwei Hamiltonsche Kreise enthält die kantendisjunkt sind. (pZH '14)
21. Jeder von 222 Politiker kennt mindestens 133 andere, aus diesen hasst er höchstens 22. Bekanntschaft und Hass sind gegenseitig. Beweisen Sie, dass diese 222 Politiker können Tüskecsarnok so umstellen, dass alle zwei Leute nebeneinander einander kennen, aber nicht hassen. (ZH '15)
22. Sei G ein einfacher Graph mit 10 Knoten, seine Gradzahlen sind 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9. Beweisen Sie, dass G keinen Hamiltonschen Kreis enthält. (pZH '16)
Beweisen Sie, dass wenn die Gradzahlen 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6 sind, dann enthält G einen Hamiltonschen Kreis.
23. Der einfacher Graph G hat $2n + 1$ Knoten und alle seiner Knoten haben Grad mindestens n . Beweisen Sie, dass G einen Hamintonschen Kreis enthält! (ZH '01)