# Grundlagen der theoretischen Informatik

Übung 5

11. Oktober 2018.

## Theorie

**Def:** *Tiefensuche* (*DFS*) Input: gerichteter oder ungerichteter Graph $G$ und Anfangsknoten $s \in V$. Output: Menge der aus $s$ erreichbaren Knoten. Ablauf: Zuerst wird $s$ besucht, dann ein Knoten $v_1$ mit $sv_1 \in E$.

In einem allgemeinem Schritt wird nach Knoten $v_i$ ein Knoten $v_j$ mit $v_iv_j \in E$ besucht falls $v_j$ früher nicht besucht wurde. Falls es keinen solchen $v_j$ gibt, geht der Algorithmus zurück zum Knoten $v_k$ aus den $v_i$ durch Kante $v_kv_i$ erreicht wurde.

*DFS-Nummerierung*: Bei der Tiefensuche werden die Knoten in der Reihenfolge nummeriert, in sie besucht werden.

*DFS-End-Nummerierung*: Die Nummerierung der Knoten in der Reihenfolge, in der ihre auslaufenden Kanten vollständig abgearbeitet wurden.

**Def:** Ein gerichteter Graph ist ein *DAG (directed acyclic graph)*, wenn er keinen gerichteten Kreis enthält. Sei $G$ ein gerichteter Graph. Eine Reihenfolge $v_1, v_2, \ldots, v_n$ der Knoten ist eine *topologische Ordnung*, wenn für alle Kanten $v_iv_j$ gilt, dass $i < j$.

**Satz:** Ein gerichteter Graph hat genau dann eine topologische Ordnung, wenn er ein DAG ist.

**Bemerkung:** Die umgekehrte DFS-End-Nummerierung eine topologische Ordnung.

**Def:** *Ungünstigster Weg*: ein $u \sim v$ Weg mit maximalen Kosten unter $u \sim v$-Wege.

**Bestimmung der ungünstigsten Wege in einem DAG**

1. Bestimmung einer topologischen Ordnung $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
2. Sei $s = v_i$. Für alle $j < i$ ist $v_j$ aus $s$ nicht erreichbar.
3. Sei $b(s) = 0$
4. für $j = i + 1, \ldots, n$

$$b(v_j) = \max\{b(v_l) + k(v_lv_j) : v_lv_j \in E \text{ und } l \geq i\}$$

5. Am Ende enthält b(v) die Kosten des ungünstigsten $s \sim v$ Weges.

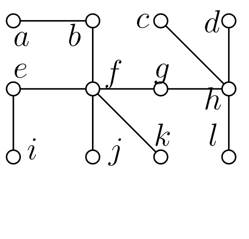
**PERT metode:** Input: Netzplan. Output: ASAP- und ALAP-Zeitpunkte der Knoten, kleinstmögliche Dauer. **Ablauf:**

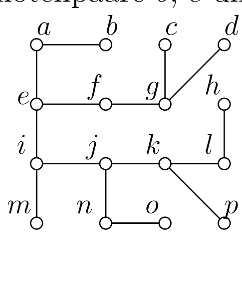
1. Bestimmung einer topologischen Ordnung $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
2. Bestimmung der ungünstigsten Wege von $S$ zu allen anderen Knoten. Die Kosten dieser Wege definieren die ASAP-Zeitpunkte. Speziell der ASAP-Zeitpunkt für $A$ ist die kleinstmögliche Dauer des gesamten Vorhabens. Sei ALAP($A$) = erlaubte Dauer.
3. Die Kanten und die topologische Ordnung werden in umgekehrter Reihenfolge betrachtet und die ungünstigsten Wege von $A$ zu allen anderen Knoten werden berechnet. Diese definieren die ALAP-Zeitpunkte:

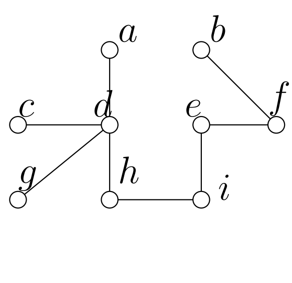
(erlaubte Dauer) - (Länge des ungünstigsten Weges von $A$ aus).

## Übungen

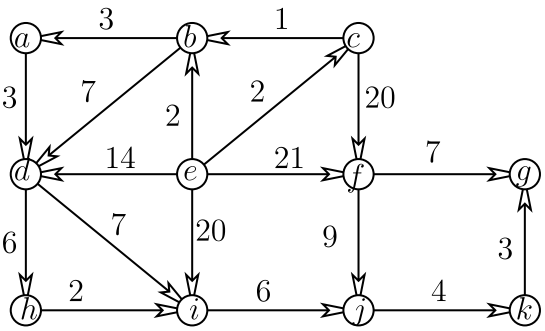
1. Zeigen Sie einen Graph $G$ und eine Kante $e$ in $G$, so dass $e$ eine Querkante ist in einer DFS-Traversierung von $G$.
2. Im Bild nach links ist ein DFS-Baum des Graphen $G$. Welcher Knoten könnte der Anfangsknoten sein, falls wir wissen, dass Knotenpaare $b$, $c$ und $a$, $e$ in $G$ benachbart sind? (ZH '14)

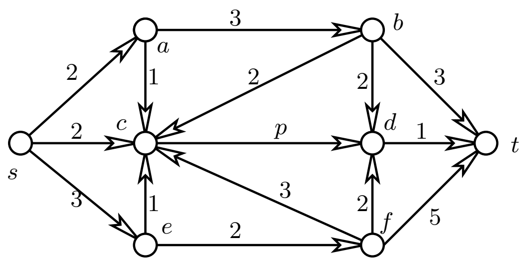


3. Im Bild in der Mitte ist ein DFS-Baum des Graphen $G$ mit Wurzel $i$ (der Anfangsknoten der DFS-Traversierung ist $i$). Wir wissen, dass $d_G(e) = 7$. Bestimmen Sie die Kanten von $G$ die mit $e$ inzident sind.
4. Nehmen wir an, dass der Graph im Bild nach rechts ein BFS-Baum mit Wurzel $h$ und auch ein DFS-Baum mit Wurzel $d$ des Graphen $G$ ist. Höchstens wie viele Kanten kann $G$ haben?
5. Seien die Knoten des Graphen $G$ $v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8$ und $v_9$, seien $v_i$ és $v_j$ benachbart, falls $i$ und $j$ teilerfremd sind. Sei die Breite von $v_iv_j$ $|i-j|$. Suchen Sie einen breitesten Weg von Knoten $v_1$ aus nach alle andere Knoten von $G$. (ZH '14)
6. Zeichnen Sie einen gerichteten Graph, führen Sie die Tiefensuche in diesem Graphen durch. Bestimmen Sie auch die DFS-Nummerierung und die DFS-End-Nummerierung! Falls wir keine Baumkanten löschen dürfen, mindestens wie viele kanten sollen wir entfernen, um einen DAG zu bekommen? Welche Kanten sollen wir löschen? Was passiert, wenn wir nicht die Kanten eines DFS-Bäumes, sondern die Kanten eines anderen Bäumes bewahren sollen?
7. Ist es wahr, dass alle kreisfreie, gerichtete Graphen genau eine topologische Ordnung haben?(pZH '14)
8. Ist es wahr, dass wenn es in einem kreisfreien, gerichteten Graphen $G$ mit $n$ Knoten einen gerichteten Weg der Länge $n-1$ gibt, dann hat er genau eine topologische Ordnung?(ppZH '14)
9. Sei $G$ einen DAG, und nehmen wir an, dass es in $G$ keinen $u \sim v$-Weg und keinen $v \sim u$-Weg gibt. Beweisen Sie, dass $G$ eine topologische Ordnung hat, in der $u$ kommt früher als $v$ vor, und er hat eine andere, in der $v$ kommt früher als $u$ vor.
10. Berechnen Sie im folgenden Netzplan die kleinstmögliche Dauer und die kritische Knoten. Was ist der letztmöglichen Zeitpunkt, in dem man $d$ so anfangen kann, dass der Vorhaben in dem frühstmöglichen Zeitpunkt beendet werden kann?




11. Geben Sie einen Beispiel für einen Netzplan, in dem alle Knoten kritisch sind, aber sie sind nicht alle auf einen kritischen Weg!