Grundlagen der theoretischen Informatik

Übung 3

27. September 2018.

Theorie

Def: Einen Teilgraph B von G heisst einen *Spannbaum (feszítő fa)* falls $V(B) = V(G)$ und B ist ein Baum.

Behauptung: G hat einen Spannbaum $\iff$ G ist zusammenhängend.

Def: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k : E \to \mathbb{R}$ eine Kostenfunktion. Wenn $F \subseteq E$, dann bezeichne $k(F) = \sum_{e \in F} k(e)$ die Kosten von F.

Kruskal-Algorithmus Input: G und k wie in Definition. Output: Ein Spannbaum $F_m = F$ von G mit minimalen Kosten.. Ablauf: Sei $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$ so dass $k(e_1) \le k(e_2) \le \cdots \le k(e_m)$. Sei $F_0 = (V, \emptyset)$.

In jedem Schritt wir probieren eine neue Kante aus E dazu nehmen, und zwar eine, die mit den bisher ausgewählten Kanten keinen Kreis bildet.

a) wenn $F_{i-1} \cup \{e_i\}$ kreisfrei ist, sei $F_i = F_{i-1} \cup \{e_i\}$;

b) wenn $F_{i-1} \cup \{e_i\}$ nicht kreisfrei ist, sei $F_i = F_{i-1}$.

Satz: Der Kruskal-Algorithmus liefert einen Spannbaum mit minimalen Kosten.

Def: *Breitensuche* oder *BFS*: Input: gerichteter oder ungerichteter Graph G und Anfangsknoten $s \in V$. Output: Menge der aus s erreichbaren Knoten. Ablauf: Am Anfang ist s besucht, alle andere Knoten sind nicht besucht. Liste L enthält nur s.

Besuchen wir alle Knoten v für denen die Kante sv existiert und legen wir diese Knoten zu der Ende der Liste L und löschen wir s. s wird durchsucht.

In einem allgemeinen Schritt betrachten wir den ersten Knoten u auf Liste L. Besuchen wir alle nicht besuchte Knoten v für denen die Kante uv existiert und legen wir diese Knoten zu der Ende der Liste L und löschen wir u. u wird durchsucht.

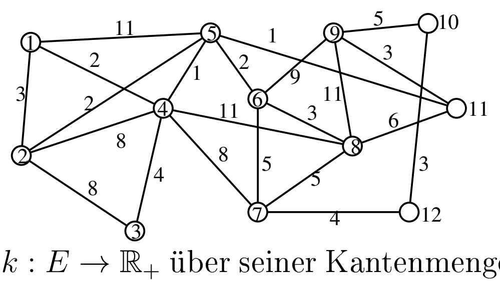
Betrachten wir für jeden Knoten ausser s jene Kante, über die der Algorithmus zuerst den gegebenen Knoten erreicht. Dann bilden diese Kanten einen Spannbaum von G. Diesen nennen wir den *vom Algorithmus gelieferten Spannbaum* oder *BFS-Baum.*

Die Kanten des Bäumes sind die *Baumkanten.* Die Kanten, die keine Baumkanten sind und von einem Knoten zu einem anderen Knoten im selben Teilbaum führen, der bei der Suche später besucht wird, heissen *Vorwärtskanten.* Die Kanten, die keine Baumkanten und von einem Knoten zu einem anderen Knoten im selben Teilbaum führen, der bei der Suche bereits vorher besucht wurde, heissen *Rückwärtskanten.* Die andere Kanten heissen *Querkanten.* (In ungerichteten Graphen gibt es nur Baumkanten, Querkanten und Vorwärtskanten.)

Satz: (1) Der BFS-Baum enthält die kürzeste Wege von s zu alle Knoten die von s aus erreichbar sind. (2) Nach dem Ablauf von BFS gibt es keine Vorwärtskante.

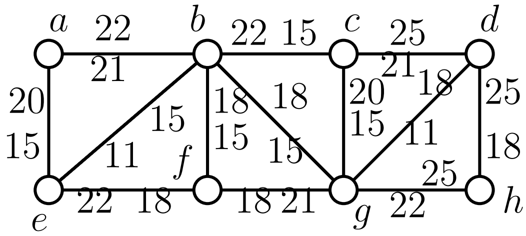
Übungen

1. Graph G hat Knoten u_1, u_2 und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und hat Kanten $u_i v_j$ wo $i = 1, 2$ und $j = 1, 2, \ldots, n$. Wie viele Spannbäume hat G?
2. Suchen Sie einen Spannbaum mit minimalen Kosten im Graphen nach rechts. Wie viele minimale Spannbäume hat dieser Graph?

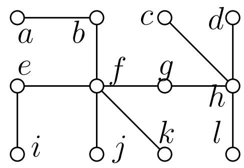


3. Gegeben ist Graph $G = (V, E)$ und eine Kostenfunktion $k : E \to \mathbb{R}_+$ über seiner Kantenmenge. Wir kennen auch einen minimalen Spannbaum F von $G - e$. Finden Sie einen Spannbaun von G der möglichst viele mit F gemeinsame Kanten hat.

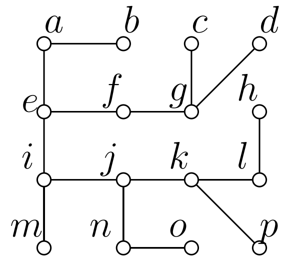
4. Die Kanten von $G = (V, E)$ in der Figur nach rechts bezeichen Strassen die erneuert werden. Jede Kante hat 2 verschiedene Kosten: die billigere bedeutet die Kosten der Erneuerung, die teurere bedeutet die selbe falls auch ein Fernradweg bauen werdet. Das Ziel ist alle Strassen erneuern so dass zwischen alle 2 Knoten von G ein Fernradweg gibt (natürlich können diese aus mehrere Kanten bestehen). Bestimmen Sie den billigsten Plan, der diese Bedingung erfüllt! (ZH'15)



5. Abszurdisztán kormánya tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével lényegében ingyen meg tudná építtetni a Rátót és Piripócs közti vezetéket. Ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?
6. Beweisen Sie, dass falls alle Kosten der Kanten des Graphen $G = (V, E)$ unterschiedlich sind, dann ist der minimale Spannbaum von G eindeutig.
7. Gegeben ist Graph $G = (V, E)$ und eine Kostenfunktion $k : E \to \mathbb{R}_+$ über seiner Kantenmenge. Beweisen Sie, dass jeder minimale Spannbaum von G ein Output von Kruskal-Algorithmus sein kann.
8. Für welche positiven ganzen k Zahlen ist es möglich einen solchen Graph angeben, der 2000 Knoten und 2000 Kanten hat, zusammenhängend ist, eine Kante hat Kosten 2 und 1999 haben Kosten 1 und G genau k verschiedene minimale Spannbäume hat? (V '99)
9. Im Schlumpfdorf ist eine Seuche ausgebrochen. Glücklicherweise heilen sich die Schlümpfe in einem Tag und sie sind am nächsten Tag immun. Aber später können sie wieder krank sein. Die Schlümpfe besuchen jeder Tag alle ihre Freunde, auch wenn sie krank sind. Wenn ein kranker und ein nicht immuner Schlumpf sich treffen, wird der gesunde krank sein. Beweisen Sie, dass falls 100 Schlümpfe im Schlumpfdorf wohnen, dann ist die Seuche am 101-ten Tag vorbei. Wie lange kann höchstens die Seuche dauern, falls die Schlümpfe neue Freundschaften schliessen können?
10. Üben Sie den BFS Algorithmus mit solchen gerichteten Graphen in denen nicht alle Knoten aus dem Wurzel r erreichbar sind.



11. Im Figur nach oben ist ein BFS-Baum eines Graphen G. Was kann der Angefangsknoten sein, falls Knoten b und c in G nicht benachbart sind? (pZH'14)
12. Im Figur nach unten ist ein BFS-Baum des einfachen, ungerichteten Graphen G. Wir wissen, dass der Anfangsknoten der Suche Knoten i ist und Knoten e hat Grad 7 in G. Beschreiben Sie alle Kanten von G die mit e inzident sind. (pZH'15)
13. Geben Sie einen Algorithmus dessen Input ein zusammenhängender, ungerichteter Graph ist der n Knoten hat. Der Algorithmus soll einen Knoten finder, der aus alle anderen Knoten durch einen Weg der Länge höchstens $n/2$ erreichbar ist.



14. Alle BFS-Bäume des ungerichteten Graphen G sind Sterne. (Stern: hat $n+1$ Knoten $u, v_1, v_2, \ldots, v_n$ und n Kanten $uv_1, uv_2, \ldots, uv_n$.) Was für ein Graph kann G sein?