Schlotter Ildi
ildi@cs.bme.hu

9. gyakorlat
Kongruenciák, Euler-Fermat tétel

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat!
   - a) $9x \equiv 24 \pmod{96}$
   - b) $104x \equiv 74 \pmod{60}$
   - c) $41x \equiv -1 \pmod{71}$
   - d) $13x \equiv 41 \pmod{58}$
   - e) $555x \equiv 5555 \pmod{55555}$
   - f) $5^{2002} \equiv x \pmod{17}$
   - g) $49^{49} \equiv x \pmod{15}$
   - h) $99! \equiv x \pmod{101}$
   - i) $65^{63^{61}} \equiv x \pmod{66}$
   - j) $1996^{659} \equiv x \pmod{99}$
2. Mi az utolsó két számjegye (tízes számrendszerben) az alábbi számoknak?
   - a) $1997^{2001^{2005}}$
   - b) $99! + 1$
   - c) $51^{49^{48}}$
   - d) $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$
3. p prím, n pedig egy természetes szám, melyre $p|10n-1$. Bizonyítsd be, hogy $10^{p-2} \equiv n \pmod{p}$.
4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímre $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}$.
5. Oldjuk meg a kövekező kongruenciarendszert: $2x \equiv 5 \pmod{7}$ és $3x \equiv 4 \pmod{8}$!
6. Keressük meg az alábbi egyenletek megoldásait az egész számok körében!
   - a) $71x - 41y = 1$
   - b) $13x + 58y = 41$

---

7. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra igazak a következők:
   - a) $n^{11} + 10n$ osztható 11-gyel.
   - b) $n^7 - n$ osztható 42-vel.
   - c) ha n nem osztható 17-el, akkor $n^8 + 1$ vagy $n^8 - 1$ oszható 17-el.
8. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi oszhatósági állítások igazak!
   - a) $5|39^{14} - 1$
   - b) $35|4^{24} - 3^{24}$
   - c) $71|61! + 1$
   - d) $17|1 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 55 \cdot 73 \cdot \dots \cdot 271 + 1$
9. Milyen számok állíthatók elő a következő alakban?
   - a) $20x + 51y$, ahol x és y egészek
   - b) $170x + 51y$, ahol x és y egészek
   - c) $21x + 33y + 77z$, ahol x, y és z egészek
10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímre és a, b egészekre $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
11. Adjuk meg az összes olyan m természetes számot és p prímet, melyekre $\phi(m) = \phi(pm)$.
12.
    - a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Tudja, hogy legfeljebb 250 lába van. Ha 11- esével számolja őket, akkor 5 marad ki, ha 15-ösével, akkor 3. Hánylábú a százlábú?
    - b) Egy másik százlábú is megirigyelte a módszert. Neki 12-esével számolva 4 marad, 15-ösével pedig 8. Bizonyítsuk be, hogy elszámolta magát!
    - c) A százlábúak királyához is eljut a módszer. Neki 6-osával számolva 5 marad, 7-esével számolva 6, 8-asával számolva pedig 7. Neki hány lába van?
13. LVIII. Leó igencsak elbizakodott uralkodó volt: csak 5 és 8 talléros érméket veretett. Ha valaki történetesen 7 tallért akart fizetni, az kénytelen volt például úgy intézni, hogy 3-szor 5 tallért fizetett, majd 8 tallért visszakapott.
    - a) Milyen módokon lehetett 99 tallért kifizetni ebben a birodalomban?
    - b) Milyen összegeket lehetett kifizetni ebben a birodalomban?
    - c) Milyen összegeket lehet kifizetni egy hasonlóan egoista kései utód, LXIX. Leó uralkodása alatt?