

8. gyakorlat Számelméleti alapok

1. Péter a XX. század második felében született, éppen nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Hány éves Péter?
 2. Mely pozitív egészeknek van ugyanannyi páros osztója, mint ahány páratlan?
 3. Bizonyítsd be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen nemnegatív egész n -re sem egyszerűsíthető!
 4. Melyik az a legkisebb 3-mal osztható szám, melynek 15 osztója van?
 5. a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, és a börtönében is épp 100 rab sýnylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A cellák zárjai "kétállásúak": ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség mindegyike végigvonul a börtönön, és mindegyik átfordít néhány zárat, mégpedig úgy, hogy a k . feleség minden k . záron pontosan egyet fordít. Miután mind a 100 feleség végigment, a nyitott ajtajú cellákban lévő rabok kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?
b) A sah következő születésnapján a feleségek rosszkösdnek, és így most a k . feleség minden k . záron pontosan k -t fordít. Ebben az évben mely cellában lakó rabok szabadulnak ki?
 6. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat!
 - a) $9x \equiv 24 \pmod{96}$
 - b) $104x \equiv 74 \pmod{60}$
 - c) $41x \equiv -1 \pmod{71}$
 - d) $13x \equiv 41 \pmod{58}$
 - e) $555x \equiv 5555 \pmod{55555}$
-
7. Melyek azok a p prímszámok, melyekre
 - a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím?
 - b) $p^2 + 2$ is prím?
 - c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?
 8. Ha 10839-et és 11863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?
 9. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek osztóinak száma osztható 11-el?
 10. Egy n pozitív egész számról tudjuk, hogy osztóinak száma p , ahol p prímszám. Állapítsuk meg, hogy az ezen p osztóból alkotható, összesen $\binom{p}{2}$ számpár közül hány lesz relatív prím.
 11. Legyenek n és k pozitív egészek, melyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + k$ és az $(n + 1)! + k$ számoknak?
 12. Hogyan számítható ki egy szám osztóinak reciprokainak összege, ha ismerjük a prímtényezősb felbontását?
 13. Bizonyítsd be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím!
 14. Legyen n olyan természetes szám, ami sem 2-vel, sem 5-tel nem osztható. Mutassuk meg, hogy van olyan többszöröse n -nek, melynek tízes számrendszerbeli alakja csupa 9-es számjegyből áll!