

11. gyakorlat

Ciklikus csoport, elem rendje, Lagrange-tétel, szimmetrikus csoport

1. A G csoport a , b és c elemei különböznek az e egységtől és $a^3 = b^5 = c^7 = e$. Lássuk be, hogy G -nek legalább 100 eleme van.
 2. Legyenek a G csoport elemei az 1,2,3,4,5,6 számok, a művelet pedig a modulo 7 szorzás. Igazoljuk, hogy a G csoport ciklikus! Adjuk meg a részcsoportjait!
 3. Hány részcsoportja van a 15 rendű ciklikus csoportnak?
 4. Legyen G egy csoport, és $G_1 \leq G$, $G_2 \leq G$. Igazak-e a következő állítások?
 - a) $G_1 \cup G_2 \leq G$
 - b) $G_1 \cap G_2 \leq G$
 5. Legyen K és H a G csoport két részcsoportja úgy, hogy K rendje és H rendje relatív primek. Bizonyítsuk be, hogy K -nak és H -nak csak az egységelem a közös eleme.
 6. Tartalmaz-e az S_5 szimmetrikus csoport a 7 elemű ciklikus csoporttal izomorf részcsoportot?
 7. Végezd el az alábbi műveleteket az S_n szimmetrikus csoportban! Add meg az eredmény ciklusfelbontását, és határozd meg a rendjét!
 - a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
 - b) $[(134)(342)]^{-1}$
 8. Döntsd el, hogy a megadott csoportokban baloldali mellékosztályt alkotnak-e (valamilyen részcsoport szerint) az alábbi részhalmazok!
 - a) az egész számok csoportja az összeadással; a $8k + 5 (k \in \mathbb{Z})$ alakú egészek
 - b) az egész számok csoportja az összeadással; a prímszámok
-
9. Mik a részcsoportjai az n rendű ciklikus csoportnak? Bizonyítsuk be, hogy ciklikus csoport részcsoportja is ciklikus!
 10. Végezd el az alábbi műveleteket az S_n szimmetrikus csoportban! Add meg az eredmény ciklusfelbontását, és határozd meg a rendjét!
 - a) $(35)(1432)(35)(1234)$
 - b) $[(34)(23)(12)]^{2007}$
 11. Igazold, hogy a következő halmazok S_n -nek generátorrendszerei:
 - a) $\{(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)\}$
 - b) $\{(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)\}$
 - c) $\{(1\ 2), (1\ 2\ 3 \dots n)\}$
 12. Bizonyítsd be, hogy a páros permutációk egy részcsoportot alkotnak S_n -ben!
 13. Döntsd el, hogy a megadott csoportokban baloldali mellékosztályt alkotnak-e (valamilyen részcsoport szerint) az alábbi részhalmazok!
 - a) S_n ; azok a permutációk, melyek 1-hez 2-t rendelnek
 - b) $D_{15}; \{t_1 f_{24}, t_1 f_{144}, t_1 f_{264}\}$