


10. gyakorlat Csoportelméleti alapfogalmak

- Döntsd el, hogy az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve félcsoportot, csoportot illetve Abel-csoportot alkotnak-e!
 - a páros számok halmaza, a művelet az összeadás
 - egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza, a művelet az unió
 - egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza, a művelet a szimmetrikus differencia, ahol A és B szimmetrikus differenciája: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
 - az egész számok halmaza, a művelet az $a \star b = a + b + 1$ képlettel adott \star művelet
 - a (-1) -től különböző valós számok, a művelet az $a \star b = ab + a + b$ képlettel adott \star művelet
 - Adjuk meg az alábbi csoportok Cayley-tábláját!
 - modulo 3 maradékosztályok a modulo 3 összeadásra nézve
 - modulo 8 redukált maradékosztályok a modulo 8 szorzásra nézve
 - Egy szabályos ötszög csúcsait számozzuk meg az óramutató járásával ellenkező irányban 1-től 5-ig. Jelölje t_i az i -edik csúcson és a vele szemközti oldal felezőpontján átmenő tengelyre való tükrözést. Jelölje f_{72} , f_{144} , f_{216} és f_{288} az ötszög középpontja körüli, megfelelő szögű forgatást. Végül jelölje I az identitást. Végezd el a szabályos ötszög szimmetriacsoportjában az alábbi műveleteket!
 - $f_{144} \cdot t_1$
 - $f_{72} \cdot t_2 \cdot f_{72} \cdot t_2$
 - $(t_1 \cdot t_3)^{-1}$
 - Egy G csoportban minden elem négyzete az egységelem. Bizonyítsd be, hogy G Abel-csoport!
 - Bizonyítsd be, hogy tetszőleges G csoport tetszőleges a és b elemére $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ teljesül!
 - Van-e olyan 20 rendű csoport, melyben van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem?
És van-e olyan 20 rendű csoport, melyben van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?
-
- Döntsd el, hogy az alábbi halmazok a megadott műveletre nézve félcsoportot, csoportot illetve Abel-csoportot alkotnak-e!
 - az összes n -edik komplex egységgyök, a művelet a szorzás
 - a $0, \dots, n - 1$ számok, a művelet a modulo n összeadás
 - a $0, \dots, n - 1$ számok, a művelet a modulo n szorzás
 - a $1, \dots, n - 1$ számok, a művelet a modulo n szorzás
 - a $\{\text{tik}, \text{tak}\}$ halmaz, a művelet az $x \star y = \begin{cases} \text{tik}, & \text{ha } x = y \\ \text{tak}, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$ képlettel megadott \star művelet.
 - a $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ számhalmaz, a művelet a szorzás
 - Határozd meg az alábbi geometriai elemek szimmetriacsoportját úgy, hogy nevet adsz az elemeiknek, és felírod a műveleti táblát!
 - téglalap
 - kocka
 - szabályos háromszög
 - szabályos tetraéder
 - paralelogramma
 - deltoid
 - 
 - A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!
 - Az alábbi következtetések közül melyek teljesülnek minden csoportban?
 - $ax = ay \Rightarrow x = y$
 - $abx = aby \Rightarrow x = y$
 - $ax = 1 \Rightarrow x = a^{-1}$
 - $xa = ya \Rightarrow x = y$
 - $axb = ayb \Rightarrow x = y$
 - $abx = 1 \Rightarrow x = a^{-1}b^{-1}$
 - $xa = ay \Rightarrow x = y$
 - $bxa = ayb \Rightarrow x = y$
 - $abx = 1 \Rightarrow x = b^{-1}a^{-1}$