

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok megoldása
2007. április 16.

Ez a példamegoldás minden feladatra csak egy lehetséges megoldást ad, természetesen bármely más jó megoldást is elfogadunk. Ha hibát találtok valahol, azt kérlek jelezzétek nekem emailben! Köszönöm!

Schlotter Ildi

1. Egy $2k$ csúcsú G egyszerű gráfban minden pont foka $k-1$ (ahol $k > 1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy G -hez hozzá lehet venni k darab új élet úgy, hogy a kapott gráf tartalmazzon Hamilton-kört!

Megoldás.

Jelölje G komplementerét \overline{G} . Mivel egy $2k$ pontú gráfban egy pontból legfeljebb $2k-1$ él indulhat ki, ezért \overline{G} -ben minden pont foka $(2k-1) - (k-1) = k$. Ez épp a pontok számának fele, így \overline{G} -ben a Dirac-tétel miatt van Hamilton-kör. (Itt felhasználtuk azt is, hogy \overline{G} egyszerű gráf.) Mivel \overline{G} pontjainak a száma páros, ezért a Hamilton-kör minden második élét véve épp egy teljes párosítást kapunk \overline{G} -ben. Jelöljük ezt M -mel.

M tehát k darab független élet tartalmaz \overline{G} -ben. Mivel ezen élek egyike sem szerepel G -ben, ezért M -et G -hez hozzávéve a kapott G' gráf egyszerű marad, és minden fokszám épp eggyel nő meg. Emiatt G' -re már alkalmazható a Dirac-tétel, így azt kapjuk, hogy G' -ben van Hamilton-kör. Ez igazolja az állítást.

Megjegyzés: fontos megmutatni, hogy \overline{G} -ben van teljes párosítás, mert ez szavatolja számunkra, hogy a behúzott k új él nem hoz létre többszörös éleket a gráfban!

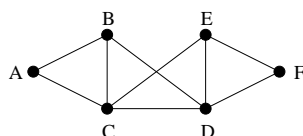
2. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = 2007$. Készítsük el a G' gráfot a következőképpen: G' -be vegyük fel G minden csúcsát és élet, továbbá G minden v csúcsa esetén vegyük fel egy új v' csúcsot, amelyet kössünk össze v -vel; végül G minden $\{u, v\}$ élére G' -ben a megfelelő u' és v' csúcsokat is kössük össze. Határozzuk meg a kapott G' gráf $\chi(G')$ kromatikus számát!

Megoldás.

Mivel G' -nek részgráfja G , ezért nyilván $\chi(G') \geq \chi(G) = 2007$. Megmutatjuk, hogy G' kiszínezhető 2007 színnel.

Legyen G' -ben a G -ben is szereplő pontok halmaza V , a vesszős pontok halmaza (azaz a maradék ponthalmaz) pedig V' . Legyen adott G -nek egy helyes színezése 2007 színnel. G' -ben a V -beli csúcsokat színezzük ki ennek megfelelően, V' színezéséhez pedig „permutáljuk” ezt a színezést, azaz színezzünk a következő stratégia szerint: ha v színe a k -edik szín, akkor v' színe legyen a $(k+1)$ -edik szín, ahol a 2008. szín legyen azonos az 1. színnel. Ez könnyen láthatóan egy jó színezés lesz, mégpedig 2007 színnel. Azaz $\chi(G) = 2007$.

3. Döntsük el, hogy az alábbi gráf intervallumgráf-e!



Megoldás.

Azt, hogy a megadott gráf intervallumgráf, könnyen igazolhatjuk úgy, hogy minden csúcsának megfeleltetünk egy-egy intervallumot oly módon, hogy pontosan azon intervallumok

messék egymást, melyekre a megfelelő csúcsok össze vannak kötve a gráfban. Például a következő hozzárendelés megfelelő:

- A csúcs $\longrightarrow [1, 2]$ intervallum,
- B csúcs $\longrightarrow [1, 4]$ intervallum,
- C csúcs $\longrightarrow [1, 6]$ intervallum,
- D csúcs $\longrightarrow [3, 8]$ intervallum,
- E csúcs $\longrightarrow [5, 8]$ intervallum,
- F csúcs $\longrightarrow [7, 8]$ intervallum.

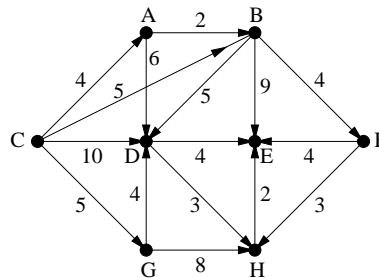
4. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \dots, 100\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G -ben, ha $|x - y| = 1$ vagy $|x - y| = 50$. Határozzuk meg a G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát!

Megoldás.

Jelöljük gráfban E_1 -el azon éleket, melyek végpontjainak különbsége 1, illetve E_2 -vel azokat, melyek végpontjainak különbsége 50. Vegyük észre, hogy E_1 élei egy Hamilton-utat alkotnak a gráfban, E_2 élei pedig független élek, hiszen nincs olyan pont, melyre két E_2 -beli él is illeszkedne. (Ezt könnyen láthatjuk, ha meggondoljuk, hogy nincs olyan 1 és 100 közötti x szám, melyre $x - 50$ és $x + 50$ is 1 és 100 közé esne.)

G -ben tehát a maximális fokszám 3, ezért $\chi_e(G) \geq 3$. Most megmutatjuk, hogy G élei kiszínezhetők 3 színnel. Színezzük E_1 éleket felváltva az 1-es és 2-es színekkel, majd színezzük E_2 éleket egy harmadik színnel. Mivel E_2 független, ezért ez egy jó színezés lesz. Emiatt $\chi_e(G) = 3$.

5. Bontsuk emeletekre a PERT diagram irányított gráfját, majd határozzuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges minimális időt és a kritikus részfeladatokat!



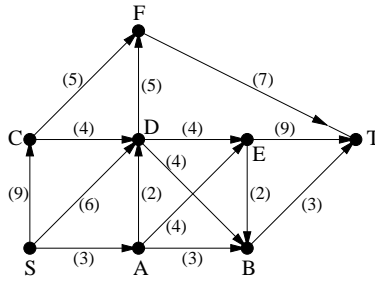
Megoldás.

Egy lehetséges emeletekre bontás: $C \mid A \mid \begin{matrix} G \\ D \end{matrix} \mid \begin{matrix} B \\ F \end{matrix} \mid H \mid E$. Innen egy lehetséges topologikus sorrend a következő: C, A, G, B, D, F, H, E . Az egyes csúcsokhoz tartozó feladatok elvégzéséhez szükséges idők:

$$\begin{aligned}
 t(C) &= 0 \\
 t(A) &= t(C) + 4 = 4, \text{ és } CA \text{ adja a maximumot,} \\
 t(G) &= t(C) + 5 = 5, \text{ és } CG \text{ adja a maximumot,} \\
 t(B) &= \max\{t(C) + 5, t(A) + 2\} = 6, \text{ és } AB \text{ adja a maximumot,} \\
 t(D) &= \max\{t(C) + 10, t(A) + 6, t(G) + 4, t(B) + 5\} = 11, \text{ és } BD \text{ adja a maximumot,} \\
 t(F) &= t(B) + 4 = 10, \text{ és } BF \text{ adja a maximumot,} \\
 t(H) &= \max\{t(G) + 8, t(D) + 3, t(F) + 3\} = 14, \text{ és } DH \text{ adja a maximumot,} \\
 t(E) &= \max\{t(B) + 9, t(D) + 4, t(F) + 4, t(H) + 2\} = 16, \text{ és } HE \text{ adja a maximumot.}
 \end{aligned}$$

Vagyis a tevékenységek elvégzéséhez szükséges összidő 16 egység. Egy kritikus út található a gráfban: $C - A - B - D - H - E$. Tehát a kritikus részfeladatok: C, A, B, D, H és E .

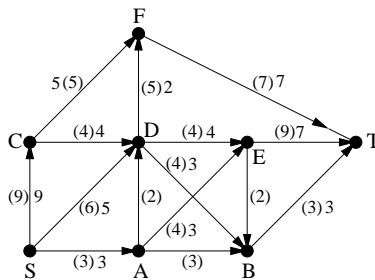
6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális ST -vágást (és bizonyítsuk be róla, hogy minimális)!



Megoldás.

A minimális ST -vágást G -ben a pontok következő felosztása adja. Legyen $X = \{S, B, C, D, F\}$ és $\bar{X} = \{A, E, T\}$, ekkor a vágásban szereplő (X -ből \bar{X} -be mutató) élek: SA, DE, BT, FT . Innen a vágás értéke $3 + 4 + 3 + 7 = 17$.

Ennek a vágásnak a minimalitását igazolhatjuk egy 17 értékű folyam megadásával. Egy megfelelő folyamat berajzoltam az ábrán (azon az élen, ahol csak a kapacitás szerepel, a folyam 0 értéket vesz fel):



7. Legyen G egy 100 csúcúsú egyszerű gráf és legyen $X \subseteq V(G)$ egy 52 csúcusból álló független csúcshalmaz G -ben. Legyen $u, v, w \in X$ három tetszőleges X -beli csúcús. Adjuk hozzá G -hez az $\{u, v\}$, az $\{u, w\}$ és a $\{v, w\}$ éleket. Van-e a kapott gráfban teljes párosítás?

Első megoldás.

Ha a kapott gráfból elhagyjuk az $\bar{X} = V(G) - X$ halmazban lévő 48 csúcúsot, akkor keletkezik 49 izolált pont és egy háromszög. Ez összesen 50 darab páratlan komponens. Vagyis \bar{X} -et elhagyva több, mint $|\bar{X}|$ darab páratlan komponens keletkezett, így Tutte tétele miatt nincs a gráfban teljes párosítás.

Második megoldás.

X függetlensége miatt $\alpha(G) \geq 52$, így a megfelelő Gallai-tétel alapján $\tau(G) = 100 - \alpha(G) \leq 48$, hiszen G -ben nincs hurokél. Ezért $\nu(G) \leq \tau(G)$ miatt a független élék maximális számára azt kapjuk, hogy $\nu(G) \leq 48$.

A kiegészített gráf egy tetszőleges párosításába a három hozzávett él közül legfeljebb egy kerülhet be, mert ezek háromszöget alkotnak. Így a kiegészített gráfban a független élék maximális száma legfeljebb 49. Viszont egy teljes párosításhoz legalább 50 független élre lenne szükség, vagyis a kapott gráfban nem lehet teljes párosítás.

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely $k \geq 1$ esetén minden k -szorosan élösszefüggő gráfban megadható $k - 1$ darab kör úgy, hogy a körök közül bármelyik kettőnek legfeljebb egy közös éle van!

Megoldás.

Hagyjunk el egy tetszőleges e élet. A kapott G' gráf ekkor még $(k - 1)$ -szorosan élösszefüggő lesz, mert belőle $(k - 1)$ -nél kevesebb élét elhagyva összefüggő gráfot kapunk. Ezt indirekt módon láthatjuk be: ha valamely kevesebb, mint $k - 1$ élből álló F élhalmazt elhagyva G' több komponensre esne szét, akkor ez azt is jelentené, hogy F -et és e -t elhagyva G -ből (ez kevesebb, mint k él) több komponensre esne szét a gráf. Ez viszont ellentmond annak, hogy G k -szorosan élösszefüggő.

Így G' -ben elhagyott él végpontjait (legyenek a és b) összekötő utak lefogásához legalább $k - 1$ él kell, ezért Menger megfelelő tétele miatt a és b között van $k - 1$ páronként éldiszjunkt út. Ezek mindegyikéhez hozzávéve az elhagyott élet éppen a feladat feltételeinek megfelelő $k - 1$ darab kört kapunk, hiszen az egyes köröknek csak e lehet közös éle.