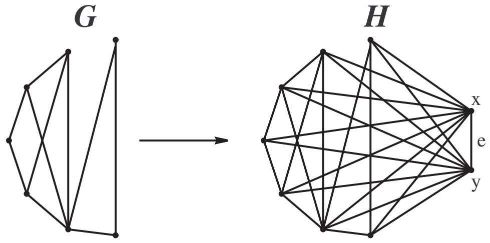
Számítástudomány alapjai
11. gyakorlathoz megoldások

1. A Karp-redukció: tetszőleges G gráfra legyen H az a gráf, amit úgy kapunk, hogy G-hez hozzáveszünk két csúcsot, amit összekötünk az összes régi csúccsal és egymással is. Azt kell bizonyítanunk, hogy G pontosan akkor színezhető 3 színnel, ha H 5 színnel színezhető. Ha G színezhető 3 színnel, akkor H-ban kiszínezzük 3 színnel a G részgráfot, és a maradék két színt megkapja a két új csúcs, ezzel kiszíneztük H-t 5 színnel. Most fordítva, ha H színezhető 5 színnel, akkor az egyik új csúcs színét semelyik másik csúcs nem kaphatta meg, mert az a csúcs az összes többivel össze van kötve. Hasonlóan a másik csúcs színét sem kaphatta meg rajta kívül más csúcs, így a gráf maradék részére (ami éppen G) 3 szín marad, azaz G színezhető 3 színnel.

2. NP-teljes. A tanú egy ilyen kör, ez polinom időben ellenőrizhető. A Hamilton-kört Karp-redukáljuk erre a problémára. Legyen G egy gráf, amire az a kérdés, van-e benne Hamilton-kör. Legyen a mostani probléma bemenete a G gráf és $k = 0$. Ekkor pontosan akkor lesz erre igen a válasz, ha G-ben van olyan kör, ami legfeljebb 0 csúcsot nem tartalmaz, azaz minden csúcsot tartalmaz, azaz van G-ben Hamilton-kör.

3. NP-teljes. Az igen választ tanúsítja egy e-n átmenő Hamilton-kör, ami polinom időben ellenőrizhető, így a tanú-tétel szerint a probléma NP-beli. Egy régi NP-teljes feladatot, a Hamilton-út kérdését vezetjük vissza erre. Legyen G egy gráf, amiről azt akarjuk eldönteni, hogy van-e benne Hamilton-út. Legyen H az a gráf, amit úgy kapunk, hogy G-hez hozzáveszünk két csúcsot, amit összekötünk az összes régi csúccsal és egymással is, és az összekötő él legyen e (a visszavezetés érdekes módon pont ugyanaz, mint a 2. feladatban).



Azt kell belátnunk, hogy H-ban pontosan akkor van e-n átmenő Hamilton-kör, ha G-ben van Hamilton-út. Ez világos: egy G-beli Hamilton-út kiegészíthető a két végpontjából x-be és y-ba vezető élekkel és e-vel, így H-ban e-n átmenő Hamilton-kör lesz, míg ugyanez fordítva is megtehető: ha H-ban van e-n átmenő Hamilton-kör, akkor ebből elhagyva e-t és a két e-vel szomszédos élet, egy G-beli Hamilton-utat kapunk.

4. P-beli. Végigmegyünk mind az $\binom{n}{2}$ csúcspáron, ez cn^2 lépés, és mindre megnézzük, hogy összekötöttek-e, és fokaik összegére teljesül-e, hogy az legalább n. Ha valamelyik csúcspárra mindkét kérdésre nem a válasz, akkor az a csúcspár megszegi Ore feltételét és a kérdésre nem a válasz, egyébként ha végigmentünk az összes csúcspáron és egyik sem szegi meg, akkor igen.

5. NP-teljes. A tanú világos. A Hamilton-kört vezetjük vissza erre; legyen G egy gráf, amiben az a kérdés, van-e Hamilton-kör; ebből gyártsuk le a H gráfot úgy, hogy felveszünk két külön háromszög komponenst G mellé. Ha G-nak van Hamilton-köre, akkor H lefedhető 3 körrel, hiszen G Hamilton-köre és a két új háromszög lefedi. Másrészt ha H lefedhető 3 körrel, akkor az csak úgy lehet, hogy a két új komponenst egy-egy külön kör fedi le, tehát G-re csak egy kör jut, ami lefedi az összes csúcsot, ez éppen egy Hamilton-kör.

6. P-beli. Ez lényegében azért van, mert a színek közül kettőt használhatunk fel szabadon, így ez egy kettő-színezési probléma (kicsit felturbózva, de azért polinom idejű marad). Lássuk.

   Ha van megfelelő színezés, akkor két színt a négy közül legfeljebb 3 csúcs kap, és a többi csúcs csak a maradék két színnel van színezve. A legfeljebb 3 csúcsra persze többféle lehetőség van: lehet 1+2, 0+2, 1+1, 0+1, 0+1, 0+0 (a *legfeljebb* 1, illetve 2 csúcs miatt). Az első lehetőségnél a kiválasztásra $\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}$ lehetőség van, ez n-nek polinomja, hasonlóan a többi eset is az. Ha már valahogyan ki van választva és színezve az 1+2 csúcs, akkor a gráf maradék részén a két színnel színezhetőséget kell ellenőrizni, ami polinom idejű. Ezek alapján az algoritmus: végigmegyünk az 1+2, 0+2, 1+1, 0+1, 0+1, 0+0 lehetőségeken sorban. Mindegyiken belül végigmegyünk az összes lehetőségen a csúcsok kiválasztására, pl. 1+2-nél ez $\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}$ eset, ez n-nek polinomja. Mindegyiknél megnézzük, hogy a 2 kijelölt csúcs között van-e él, ha igen, akkor ugrunk a következő esetre. Ha nem, akkor megnézzük, a maradék színezhető két színnel (ez független a kijelölt 3 csúcstól és polinom időben megtehető). Ha igen, készen vagyunk és az egész gráf színezhető két színnel. Ha nem, megyünk a következő esetre. Miután végignéztük az összes 1+2 típusút, megyünk a 0+2-re és így tovább. Ha minden esetet megnéztünk és semelyik nem volt jó, akkor nincs jó színezés. Az egész program polinom sok esetből áll, mindegyik polinom idő alatt megvizsgálható, így a program futási ideje is polinom.

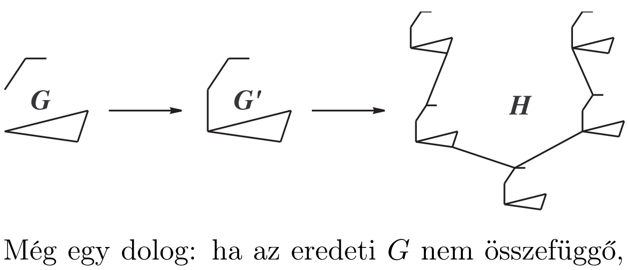
7. P-beli. Pontosan akkor van a gráfban e-n átmenő kör, ha e-t elhagyva a maradék gráfban e két végpontja egy komponensben van. Hagyjuk el a gráfból az e élet és indítsunk egy bejárást az egyik végpontból. Ez polinom idő alatt megvan. Nézzük meg, hogy a bejárt pontok között ott van-e e másik végpontja. Ha igen, akkor van e-n átmenő kör, ha nem, akkor nem.

8. NP-teljes. Az igen választ tanúsítja egy megfelelő színezés, ami polinom időben ellenőrizhető. Visszavezetjük erre a kérdésre a három színnel színezhetőség problémáját (ami NP-teljes). Tetszőleges G-hez legyen H az a gráf, amit úgy kapunk, hogy hozzáveszünk még két csúcsot, x-et és y-t, amit nem kötünk össze semmivel. Ha G színezhető volt 3 színnel, akkor H színezhető 3 színnel úgy, hogy x és y színe különböző legyen, mert egyszerűen kiegészítjük G színezését úgy, hogy x megkapja az 1-es, y a 2-es színt. Fordítva, ha H színezhető 3 színnel úgy, hogy x és y színe különböző, akkor G is színezhető 3 színnel, mivel G részgráfja H-nak.

9. NP-teljes. A tanú világos. Az előző feladat visszavezetése egy az egyben működik. Az ember azt gondolná, hogy x-et és $y - t$ érdemes összekötni, hogy valahogy ebbe legyen belekódolva az, hogy különböző színűek, de erre nincs szükség (noha az is jó). Attól, hogy nincsenek összekötve, kaphatnak különböző színt. Érdemes végignézni az előző feladat gondolatmenetét lépésről lépésre, tényleg minden stimmel itt is.

10. NP-teljes. Egy legalább k hosszú kör tanúsítja az igen választ és polinom időben ellenőrizhető, így NP-beli. Visszavezetjük erre a problémára a Hamilton-kör keresést. Csináljunk egy H gráfot, ami úgy néz ki, hogy vesszük G öt példányát. Ez egy $n = 5k$ csúcsú gráf, amiben nyilván pontosan akkor van legalább k hosszú kör, ha G valamelyik példányában van legalább k hosszú kör, azaz Hamilton-kör.

   Mivel a mostani feladatban összefüggő gráf kell, ezért ez így még nem jó visszavezetés; először is, ha G nem összefüggő, akkor összefüggővé kéne tenni úgy, hogy Hamilton-kör azért ne keletkezzen benne. Ez megtehető polinom időben, mert G komponensei felismerhetőek polinom időben, és ezeket sorban összekötjük egy-egy éllel (ha úgy tetszik, egy feszítőfát varázsolunk rájuk). Új kört ezzel nem hozunk létre, mert egy kör nem nyúlhat át a komponensek között, hiszen csak egy-egy éleket húztunk be. Ezután a kapott G' gráf öt példányát összekötjük egy-egy éllel hasonlóan, mint az előbb (ábra).

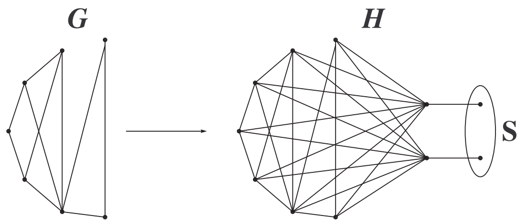
   

   Még egy dolog: ha az eredeti G nem összefüggő, akkor persze nincs benne Hamilton-kör, de ettől még nem mondhatjuk azt, hogy akkor ezekre nem is nézzük tovább a dolgot, mert a Karp-redukciónál egy feladat inputját kell visszavezetni egy másik feladat inputjára. Ha nem összefüggő, akkor is meg kell csinálni a visszavezetést, csak persze ügyesen, úgy, hogy a végén nem legyen a válasz. Itt írom le azt a tipikus hibát is, hogy a visszavezetést nem csinálhatjuk úgy, hogy „vegyük G-nek a Hamilton-körét,...", a visszavezetésnek működnie kell minden gráfra, függetlenül attól, van-e benne Hamilton-kör vagy nincs.

11. P-beli. Az a kérdés, van-e olyan feszítőfa, amiben az S-beli csúcsok mind elsőfokúak. Azaz van-e G-nek olyan feszítőfája, amiben a $G \backslash S$-beli csúcsokon a feszítőfa akárhogyan kinézhet, de az S-beli csúcsok mind elsőfokúak, azaz $G \backslash S$-be vannak bekötve. Ez ellenőrizhető polinom időben: azt kell megnézni, hogy $G \backslash S$ összefüggő-e, és azt, hogy fut-e minden S-beli csúcsból él $G \backslash S$-be, ez utóbbi is nyilván polinom időben megoldható. Ha mindkettőre igen a válasz, akkor van ilyen feszítőfa, ha valamelyikre nem, akkor nincs.

12. NP-teljes. A tanú nyilvánvaló. Az $A \subseteq S$ egy nagyon erős megkötés a gráf szerkezetére. Ha például A 2 elemű, akkor a feszítőfa csak úgy nézhet ki, hogy egy Hamilton-út, aminek a két végpontja A két eleme. Persze ha a Hamilton-utat szeretnénk erre visszavezetni, akkor nem ilyen egyszerű a helyzet, mert ott nincs kijelölve két végpont, míg nekünk kéne.

    Egy lehetséges visszavezetés a következő: a G gráfot (melyben Hamilton-út létezése a kérdés) „lezárjuk" két új csúccsal, melyeket az összes régivel összekötünk, majd még egy-egy új csúcsot bekötünk hozzájuk. Ez az utolsó kettő lesz az S halmaz (a kapott gráf pedig H).

    Ha G-ben van Hamilton-út, akkor H-ban van olyan feszítőfa, melynek két elsőfokú csúcsa a két kijelölt csúcs (= olyan Hamilton-út, melynek két végpontja a két kijelölt csúcs), mert a G-beli Hamilton-út akárhol is végződik, meghosszabíthatjuk a két-két új csúccsal. Fordítva, ha az új gráfban van olyan feszítőfa, melynek két elsőfokú csúcsa S-beli, akkor ennek elhagyva a végéről a két-két új csúcsot, az eredeti gráf egy Hamilton-útját kaptuk.