A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2024. 10. 31.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy az F fának a levelein kívül két negyedfokú, négy másodfokú és három harmadfokú csúcsa van. Hány levele van F-nek? (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges megmutatni, hogy a feladat feltételeit kielégítő fa valóban létezik.)

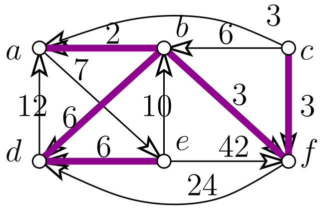
   Jelölje ℓ az F fa leveleinek számát. Ekkor F csúcsainak száma $\ell + 2 + 4 + 3 = \ell + 9$. (2 pont)
   Az órán tanultak szerint F-nek $\ell + 8$ éle van. (2 pont)
   A kézfogáslemma miatt F csúcsainak fokszámösszege $2 \cdot (\ell + 8) = 2\ell + 16$, (2 pont)
   azaz $2\ell + 16 = 1 \cdot \ell + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = \ell + 25$, (2 pont)
   ahonnan $\ell = 9$ adódik F levelei számára. (2 pont)

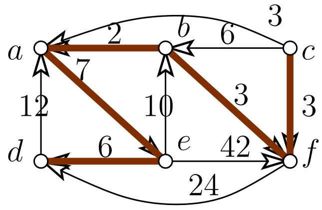
   Ha egy megoldó csak annyit tesz, hogy felrajzol egy, a feladat feltételeit kielégítő fát, és megszámolja, hogy annak 9 levele van, akkor erre (legfeljebb) 1 pontot kapjon.

2. Tekintsük a bal oldali ábrán látható G gráf irányítatlan változatát. Igaz-e, hogy ennek a gráfnak minden minimális költségű feszítőfája tartalmazza a bd élt?

   Keressünk egy minimális költségű feszítőfát a Kruskal-algoritmussal. (Ez a pont akkor is jár, ha egyértelműen kiderül, hogy a megoldó ezzel az algoritmussal dolgozik.) (1 pont)
   Az algoritmus az élekről a költségük szerinti növekvő sorrendben dönti el, hogy bekerüljenek-e a minimális költségű feszítőfába. (2 pont)
   (Ha egy megoldó csak felrajzolja a minimális költségű feszítőfát, de egyáltalán nem követhetők nála az algoritmus lépései, az ezt a 2 pontot nem kapja meg abban az esetben sem, ha a felrajzolt feszítőfa helyes.)
   Egy minimális költségű feszítőfa a bal oldali ábrán látható. Ennek a költsége 20. (2 pont)
   Hagyjuk el a bd élt és keressünk így is egy minimális költségű feszítőfát a Kruskal-algoritmussal. (2 pont)
   Ekkor a jobb oldali ábrán látható feszítőfát kapjuk. Ennek a költsége 21. (2 pont)
   Mivel a bd élt nem tartalmazó feszítőfák közül a minimális költségűek drágábbak, mint a tényleges minimális költségű feszítőfák, ezért G minden minimális költségű feszítőfája tartalmazza a bd élt. (1 pont)

Ha egy megoldó csak annyit mond, hogy a Kruskal-algoritmusnak mindenképp be kell vennie a bd élt a minimális költségű feszítőfába, akkor további indoklás híján legfeljebb 5 pontot kaphat meg, ugyanis az előadáson nem szerepelt, hogy a Kruskal-algoritmus minden minimális költségű feszítőfát megtalál.





3. Futtassuk le a szélességi bejárást az a csúcsból indulva a bal oldali ábrán látható gráfon úgy, hogy minden alkalommal, amikor több csúcs közül szabadon választhatunk, akkor válasszuk az ABC szerinti első csúcsot. Adjuk meg G éleinek a végrehajtott bejárás szerinti osztályozását. (Az élekre írt számoktól tekintsünk el. Az algoritmus lépései egyértelműen derüljenek ki a megoldásból.)

   Az órán tanult módon futtatjuk a szélességi bejárás algoritmusát, mindig a legkisebb elérési számú befejezetlen csúcsból próbálunk új csúcsot elérni, ha van ilyen. (2 pont) (Ez a pont akkor is jár, ha az algoritmus lépései egyértelműen kiderülnek a megoldásból.)

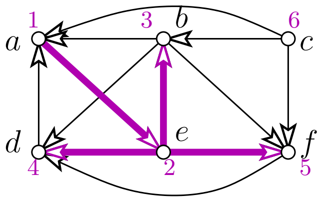
   Az ábra az algoritmus futása utáni állapotot mutatja, a csúcsok melletti számok az elérési (és egyben befejezési) sorrendet mutatják, a megvastagított élek alkotják a bejárás fáját. (4 pont)

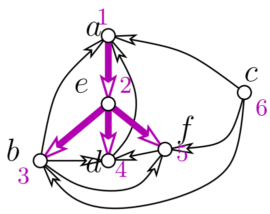
   Faélek, azaz a bejárás által használt élek: ae, eb, ed, ef.

   Visszaélek, azaz a leszármazottból ősbe mutató élek: ba, da.

   Keresztélek, azaz azon élek, melyek kezdő- és végpontja között nincs ős–leszármazott viszony: bd, bf, cb, ca, cf, fd. (4 pont)

   (Ez a 4 pont akkor is jár, ha egyértelműen kiderül, hogy a megoldó hogyan osztályozta az éleket, például egy jó rajz által. Ha egy megoldó rosszul osztályozza a c-ből kimenő éleket, akkor azért 2 pontot veszítsen el. Minden egyéb rosszul osztályozott él 1 pont elvesztésével jár ebből a 4 pontból.)





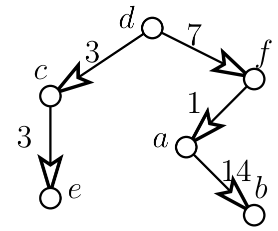
4. A mellékelt táblázat a felső becslés változását mutatja a Dijkstra-algoritmusnak egy nemnegatív élhosszokkal rendelkező, irányított G gráfon történő futtatása során. Határozzuk meg, melyik csúcsból indult az algoritmus, és adjuk meg az ezen gyökérhez tartozó legrövidebb utak fáját. Válaszunkat indokoljuk.

a	b	c	d	e	f
∞	∞	∞	0	∞	∞
11	∞	3	0	∞	7
10	∞	3	0	6	7
9	42	3	0	6	7
8	24	3	0	6	7
8	22	3	0	6	7

   A táblázat első sorát úgy töltjük ki, hogy a gyökérhez 0-t írunk, az összes többi csúcshoz pedig végtelent, (1 pont)

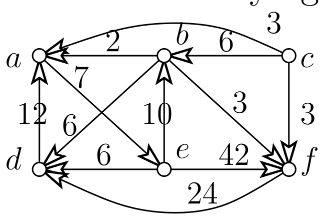
vagyis a gyökér a d csúcs. (1 pont)
(Ha egy megoldásból nem derül ki egyértelműen, hogy miért a d a gyökér, akkor a megoldó az első 1 pontot veszítse el.)
A KÉSZ halmazba mindig az a KÉSZ halmazon kívüli csúcs kerül, amelyikre az aktuális felső becslés a legkisebb. (1 pont)
Az alábbi táblázatban a bekarikázott számú csúcsok kerülnek az adott lépésben a KÉSZ halmazba, a számok mellé írt csúcsok pedig azt jelölik, hogy melyik csúcsból kilépő él mentén történt meg a javítás. (4 pont)
(Természetesen ez a 4 pont akkor is jár, ha más módon jelennek meg egy megoldásban ezek az információk.)

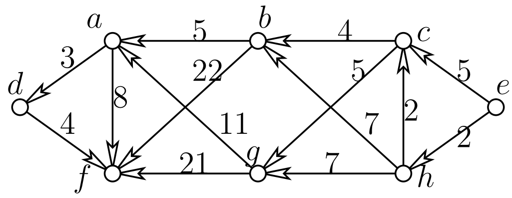
a	b	c	d	e	f
∞	∞	∞	0	∞	∞
11 d	∞	3 d		∞	7 d
10 c	∞			6 c	7 d
9 e	42 e				7 d
8 f	24 f				
	22 a				



Az alábbi ábra mutatja az ez alapján felrajzolt legrövidebb utak fáját. (3 pont)

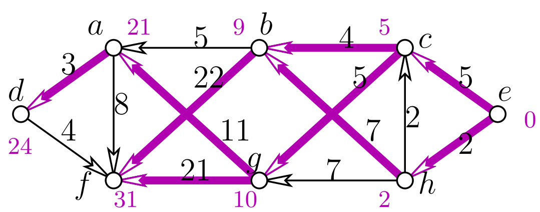
5. Határozzuk meg a jobb oldali ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét és a kritikus tevékenységeket!





Forrástörlés módszerével (vagy más, alkalmas módon) meghatározzuk a G gráf csúcsainak egy topologikus sorrendjét: e, h, c, b, g, a, d, f. (2 pont)
(Ha nem derül ki a (helyes) topologikus sorrend meghatározásának módszere, az 1 pont veszteség.)
Az órán tanult PERT-módszer futtatása után az ábrán látható eredmény adódik. A legkorábbi befejezési időket a csúcsok mellett álló számok jelzik, (3 pont)
az egyes csúcsokba befutó leghosszabb utak utolsó éleit pedig megvastagítottuk. (3 pont)
A kritikus tevékenységek b, c, e, f, g, h. (2 pont)

Ha egy megoldó elszámol egy befejezési időt (de utána azzal helyesen számol tovább), akkor 1 pontot, ha pedig nem jelöli meg az összes lehetséges utolsó élt, akkor ezért 2 pontot veszít.



⋆ Tegyük fel, hogy a G gráf minden éle ki van színezve a piros, zöld, sárga és kék színek valamelyikére úgy, hogy a négy közül bármelyik színre színezett éleket is hagyjuk el G-ből, a maradék gráfnak van Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy ekkor G-nek is van Euler-körsétája.

A tanultak szerint azt kell igazolni, hogy a G gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és G-ben minden csúcs fokszáma páros. (2 pont)
Először megmutatjuk, hogy G izolált pontoktól eltekintve összefüggő. Indirekt tegyük fel, hogy nem az. Ekkor G-nek van legalább két, élt tartalmazó komponense. Ezen komponensekből egy-egy élt kiválasztva a kiválasztott élek legfeljebb két színt határoznak meg, mondjuk pirosat és zöldet. Ha tehát ezektől különböző színű, mondjuk kék színű éleket hagynánk el G-ből, akkor az így kapott gráfnak is lenne két különböző, élt tartalmazó komponense. Ez ellentmond annak, hogy a kék színt elhagyva van a gráfnak Euler-körsétája. Ezért G izolált pontoktól eltekintve összefüggő. (3 pont)
Most megmutatjuk, hogy minden csúcs fokszáma páros G-ben. Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa, és legyen $d_p(v), d_z(v), d_k(v)$, ill. $d_s(v)$ a v-re illeszkedő piros, zöld, kék és sárga élek száma. A feladatban megfogalmazott feltétel és az Euler-körséta fent idézett karakterizációja miatt e négy egész számból bármelyik hármat is adjuk össze, páros számot kapunk eredményül. Ez csak akkor lehetséges, ha e négy fokszám mindegyike páros. Ha ugyanis valamelyik, mondjuk $d_p(v)$, páratlan lenne, akkor $d_p(v)+d_z(v)+d_k(v)$ és $d_s(v)+d_z(v)+d_k(v)$ párossága miatt $d_s(v)$ is páratlan. Mivel $d_p(v)+d_s(v)+d_z(v)$ és $d_p(v)+d_s(v)+d_k(v)$ párosak, $d_z(v)$-nek és $d_k(v)$-nek is párosnak kell lennie. Ekkor azonban $d_p(v) + d_z(v) + d_k(v)$ páratlan, ami ellentmondás. Ezek szerint a $d_p(v), d_z(v), d_k(v)$ és $d_s(v)$ számok mindegyike páros. A v csúcs fokszáma tehát $d(v) = d_p(v)+d_z(v)+d_k(v)+d_s(v)$ szintén páros, és nekünk pontosan erre van szükségünk a bizonyítás befejezéséhez. (5 pont)
Az utolsó 5 pont az alábbi gondolatmenet ismertetésével is megszerezhető. A v csúcs fokszámát a piros-, a zöld-, a kék- és a sárgamentes gráfban összeadva éppen a v csúcs G-beli fokszámának háromszorosát kapjuk. Mivel a korábbi észrevételek miatt négy darab páros számot adtunk össze, ezért az eredmény is páros lesz, ami hárommal elosztva továbbra is páros marad. Tehát a v csúcs fokszáma valóban páros G-ben.