A számítástudomány alapjai

Minimális költségű feszítőfák

2024. szeptember 10.

Emlékeztető

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.

Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk a zöld élek gráfjaként, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket az ÉlHaL szerint színezzük.
  (Piros él kört hoz létre, zöld él komponensszámot csökkent.)

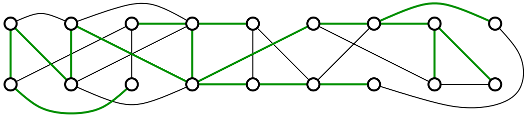
Emlékeztető

- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk a zöld élek gráfjaként, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket az ÉlHaL szerint színezzük.
  (Piros él kört hoz létre, zöld él komponensszámot csökkent.)
- Ha G nem volt összefüggő, akkor a zöld élek G feszítő erdejét alkotják.

Emlékeztető

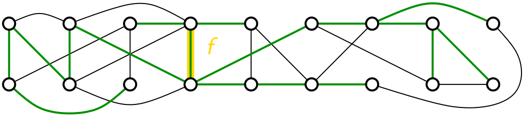
- G gráf feszítőfája: a G-ből éltörlésekkel kapható fa.
- Tetsz. G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.
- Összefüggő G gráf feszítőfáját megkaphatjuk a zöld élek gráfjaként, ha G-t élek egyenkénti behúzásával építjük fel, és az éleket az ÉlHaL szerint színezzük.
  (Piros él kört hoz létre, zöld él komponensszámot csökkent.)
- Ha G nem volt összefüggő, akkor a zöld élek G feszítő erdejét alkotják.
- Az ÉlHaLra ,,másik irányból" ránézve pedig az látszik, hogy ha egy kör élét töröljük, akkor nem változnak a komponensek. Ezért úgy is található feszítőfa (vagy feszítő erdő), hogy addig törlünk körbeli élt, amíg van kör a gráfban.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él F-beli-e, kétféle lehet ez az élhalmaz.

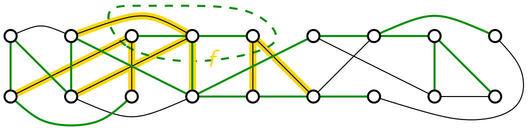
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él F-beli-e, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

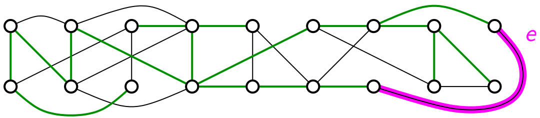
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él F-beli-e, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer

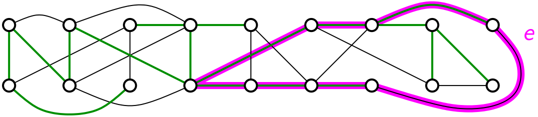


Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él F-beli-e, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

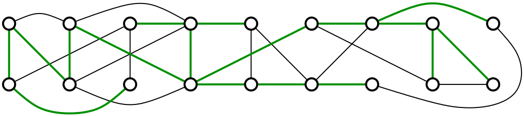
Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él F-beli-e, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.
Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él F-beli-e, kétféle lehet ez az élhalmaz.

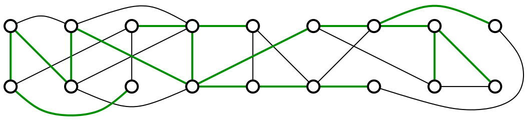
Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor

$(f \in C_e) \iff (F - f + e \text{ ffa})$

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él F-beli-e, kétféle lehet ez az élhalmaz.

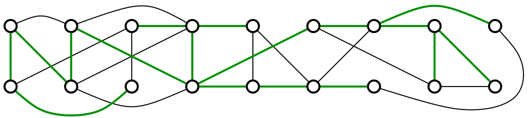
Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak.

Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor

$(f \in C_e) \iff (F - f + e \text{ ffa}) \iff (e \in Q_f)$.

Alapkörrendszer, alap vágás rendszer



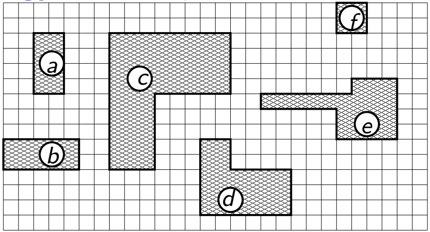
Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él F-beli-e, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f alap vágást G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e alapkör az $F + e$ köre.

Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor $(f \in C_e) \iff (F - f + e \text{ ffa}) \iff (e \in Q_f)$.

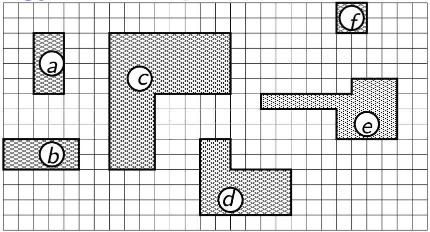
Köv: Az C_e alapkört e mellett azon F-beli élek alkotják, amelyek alap vágása e-t tartalmazza, azaz $C_e = \{e\} \cup \{f \in E(F) : e \in Q_f\}$. A Q_f alap vágást f mellett G azon élei alkotják, melyek alapköre f-et tartalmazza, azaz $Q_f = \{f\} \cup \{e \in E(G) \setminus F(F) : f \in C_e\}$.

Egy gyakorlati probléma

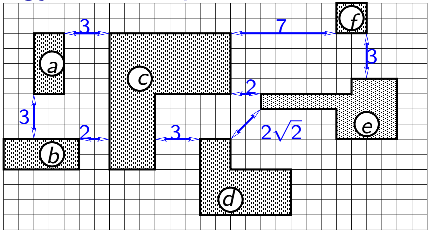


A Guváti vállalat piripócsi üzemében álló fém konténereket kell leföldelni, azaz mindegyiket közvetlenül vagy közvetve összekötni az f földelési ponttal. Nem törődünk a vonatkozó érintésvédelmi szabályokkal, így egy konténer egy másik, már földelt konténerhez is hozzácsatlakoztatható. Hogyan lehet ezt a feladatot a lehető legkevesebb földelővezeték felhasználásával úgy megoldani, hogy minden felhasznált vezetéknek egy konténert vagy egy másik konténerrel, vagy a földelési ponttal kell közvetlenül összekötnie?

Egy gyakorlati probléma

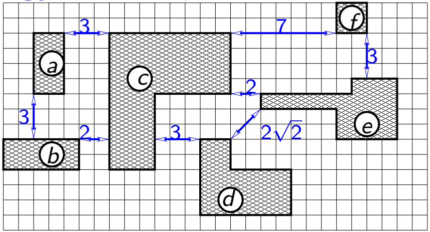


Egy gyakorlati probléma



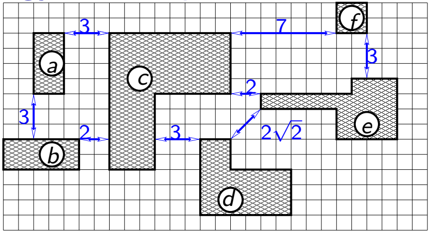
- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.

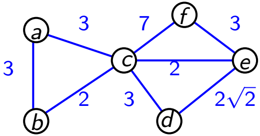
Egy gyakorlati probléma



- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.

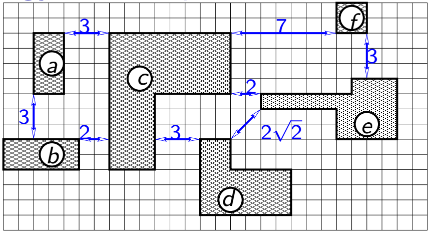
Egy gyakorlati probléma

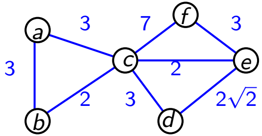




- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.

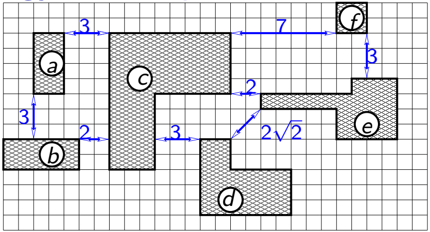
Egy gyakorlati probléma

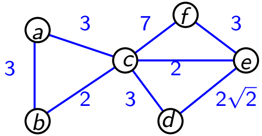




- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.
- G-nek úgy kell kiválasztani néhány élét, hogy f-ből G minden más csúcsába el lehessen jutni a kiválaszott éleken, és emellett a kiválasztott élekre írt számok összege minimális legyen.

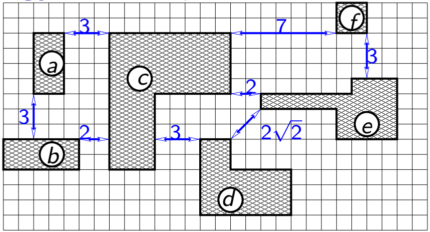
Egy gyakorlati probléma

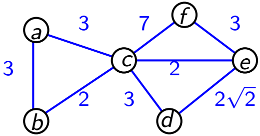




- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.
- G-nek úgy kell kiválasztani néhány élét, hogy f-ből G minden más csúcsába el lehessen jutni a kiválaszott éleken, és emellett a kiválasztott élekre írt számok összege minimális legyen.
- Ezért a kiválasztott éleknek körmentes öf gráfot kell alkotniuk.

Egy gyakorlati probléma





- Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
- Ezen összekötésekből kell párat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
- G Gráfot készítünk, $V(G) =$ a konténerek $+$ a földelési pont, $E(G) =$ az értelmes összeköttetések.
- G-nek úgy kell kiválasztani néhány élét, hogy f-ből G minden más csúcsába el lehessen jutni a kiválaszott éleken, és emellett a kiválasztott élekre írt számok összege minimális legyen.
- Ezért a kiválasztott éleknek körmentes öf gráfot kell alkotniuk.
- A továbbiakban ezt a feladatot formalizáljuk.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$. Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítő erdeje, ha
(1) (V, F) a G feszítő erdeje, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítő erdejére.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Megf: A konténerföldelési probléma megoldása egy mkffa.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉlHaL szerint zöldre színezett élek halmazaként.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉlHaL szerint zöldre színezett élek halmazaként.
Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉlHaL szerint zöldre színezett élek halmazaként. Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.
Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.

Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz költsége az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben minimális költségű feszítőfa (mkffa), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉlHaL szerint zöldre színezett élek halmazaként.
Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.
Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.
Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

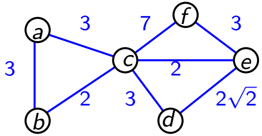
$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán

Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

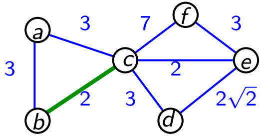
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

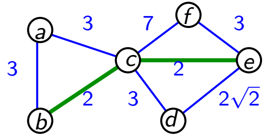
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

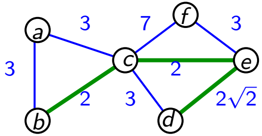
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

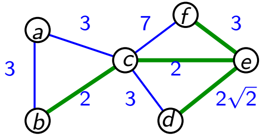
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

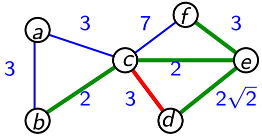
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

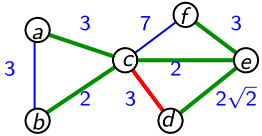
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

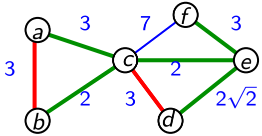
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

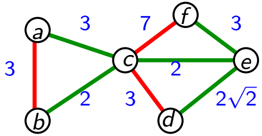
Kruskal-algoritmus egy példán



Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

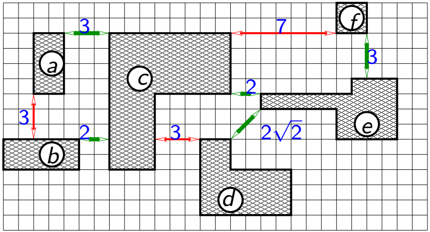
Kruskal-algoritmus egy példán

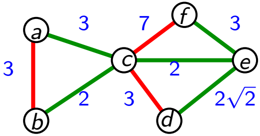


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán

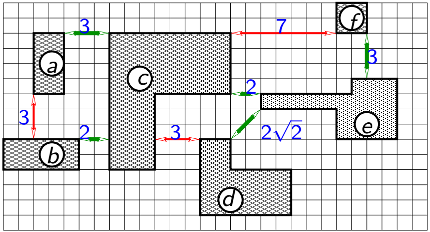


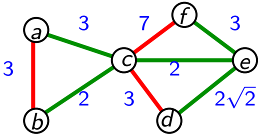


Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Kruskal-algoritmus egy példán





Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv.
Output: $F \subseteq E$ Működés: Tfh $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Megj: Láttuk, hogy a Kruskal-algoritmus feszítő erdőt talál.
Sőt: ha G összefüggő, akkor a Kruskal outputja feszítőfa.
A kérdés az, hogy ez a rövidlátó, mohó stratégia vajon mindig optimális megoldást, azaz mkffát (ill. min.ktg-ű feszítő erdőt) ad-e.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.
Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G=(V,E)$ gráf és $k:E\to\mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c=(V,E_c)$, ahol $E_c:=\{e\in E: k(e)\leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.
Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F\cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c>0$ esetén.
Ez egy rendkívül hasznos tulajdonság, érdemes neki nevet adni.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek:
$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.
Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.
Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.
Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza c-feszítő tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.
Megj: Ha a legfeljebb c költségű éleket olcsónak hívjuk, akkor a c-feszítő tulajdonság azt jelenti, hogy az olcsó élek gráfjában feszítő erdőt alkotnak az F-beli olcsó élek. (Ha olyan szemüvegben néznénk a gráfra, amivel csak az olcsó éleket látjuk, akkor az általunk látott G-nek egy feszítő erdejét alkotná az, amit F-ből látunk.)

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \le c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.
Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.
Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza *c-feszítő* tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.

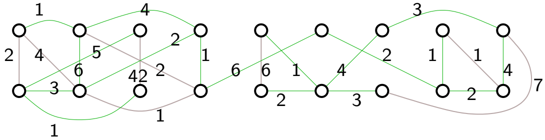
A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza *c-feszítő* tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



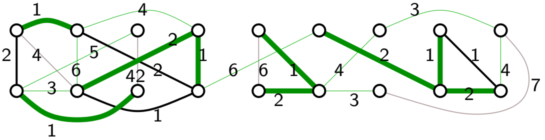
Példa: Az ábrán látható gráfban az F élhalmaz

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza *c-feszítő* tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



Példa: Az ábrán látható gráfban az F élhalmaz nem 2-feszítő, hisz a baloldali komponenst nem feszítik a F legfeljebb 2 költségű élei.

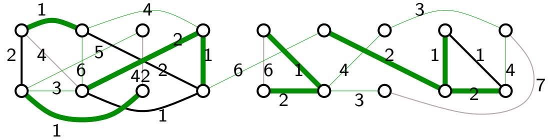
A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza *c-feszítő* tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



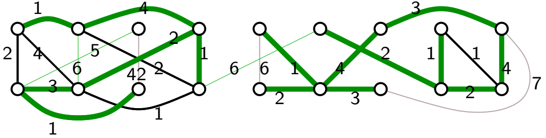
Példa: Az ábrán látható gráfban az F élhalmaz

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.

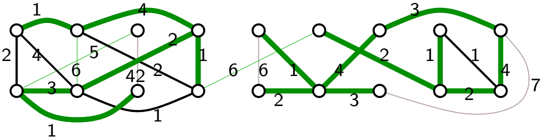
Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza *c-feszítő* tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



Példa: Az ábrán látható gráfban az F élhalmaz 4-feszítő, hisz F 4-nél nem drágább élei G_4 mindkét komponensének egy-egy ffáját alkotják.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.
Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.
Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza *c-feszítő* tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



Példa: Az ábrán látható gráfban az F élhalmaz

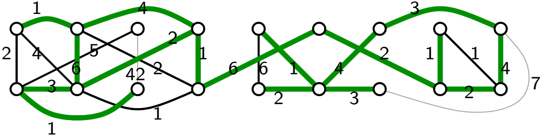
A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza *c-feszítő* tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.



Példa: Az ábrán látható gráfban az F élhalmaz nem 6-feszítő u.i. a 6-nál nem drágább F-beli élek tartalmaznak kört.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek:
$G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.
Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.
Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza *c-feszítő* tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.

A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \leq c\}$.
Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.
Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.
Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza c-feszítő tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.

Megj: Azt láttuk, hogy a Kruskal-algoritmus F outputja c-feszítő tulajdonságú minden $c > 0$ esetén.
Igazolni fogjuk, hogy ez a tulajdonság karakterizálja is a mkffákat, azaz nem csupán minden mkffa rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, de minden ilyen tulajdonságú élhalmaz egyúttal mkffa is.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \dots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \dots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Megj: A fenti Lemmában F szükségképpen feszítő erdő, hisz ha c minden fellépő élköltségnél nagyobb, akkor $E_c = E$ és $G_c = G$. Így $F \cap E_c = F \cap E = F$ a $G_c = G$ feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f_1', f_2', \ldots, f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1') \leq k(f_2') \leq \ldots \leq k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Biz: Indirekt: tfh $k(f_i) > k(f_i') = c$. Ekkor $f_i, f_{i+1}, \ldots \notin E_c \cap F$ ezért $|E_c \cap F| < i$. Az F c-feszítő tulajdonsága miatt $E_c \cap F$ a G_c egy olyan feszítő erdeje, ami i-nél kevesebb élt tartalmaz. Az $f_1', f_2', \ldots, f_i'$ élek is mind E_c-beliek, és többen vannak az $E_c \cap F$ feszítő erdő élszámánál. Tehát $f_1', f_2', \ldots, f_i'$ nem körmentes, így $f_1', f_2', \ldots, f_\ell'$ sem az. Az indirekt feltevés ellentmondásra vezetett. Ez azt jelenti, $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall i = 1, 2, \ldots$ esetén.
Ezért $\tilde{k}(F) = \sum_{i=1}^{\ell} k(f_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell} k(f_i') = \tilde{k}(F')$. $\square$

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f_1', f_2', \ldots, f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1') \leq k(f_2') \leq \ldots \leq k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Biz: Láttuk, hogy ha F a Kruskal-algoritmus outputja, akkor F c-feszítő tulajdonságú minden $c > 0$ esetén. Ezért a Lemma szerint $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül G tetszőleges F' feszítő erdejére. $\square$

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f_1', f_2', \ldots, f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1') \leq k(f_2') \leq \ldots \leq k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ F' c-feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$-ra.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f_1', f_2', \ldots, f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1') \leq k(f_2') \leq \ldots \leq k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ F' c-feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$-ra.

Biz: $\Leftarrow$: Ha F' minden c-re tartalmazza G_c egy feszítő erdejét, akkor a Lemma miatt F' a G minimális költségű erdeje.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f_1', f_2', \ldots, f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1') \leq k(f_2') \leq \ldots \leq k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ F' c-feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$-ra.

Biz:

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ F' c-feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$-ra.

Biz: $\Rightarrow$: Indirekt. Tfh valamely $c > 0$-ra $F' \cap E_c$ nem feszítő erdeje G_c-nek, és legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. Mivel F c-feszítő tulajdonságú, ezért $|F' \cap E_c| < |F \cap E_c| =: i$. Így $k(f_i) < k(f'_i)$. Ráadásul a Lemma miatt $k(f_j) \leq k(f'_j)\ \forall j$. Így aztán $\tilde{k}(F) < \tilde{k}(F')$, tehát F' nem minimális költségű feszítő erdő. ↯ $\square$

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f_1', f_2', \ldots, f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1') \leq k(f_2') \leq \ldots \leq k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ F' c-feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$-ra.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \leq k(f'_2) \leq \ldots \leq k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ F' c-feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$-ra.

(3) Ha a G gráf összefüggő, akkor G minden feszítő erdeje egy komponensből áll, azaz feszítőfa. Így a Kruskal-algoritmus minimális költségű feszítőfát talál bármely összefüggő G gráfban.

Mkffák struktúrája

Lemma: Tfh $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, és az $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú $\forall c \geq 0$-ra, továbbá $k(f_1) \leq k(f_2) \leq \ldots \leq k(f_\ell)$. Tfh $F' = \{f_1', f_2', \ldots, f_\ell'\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f_1') \leq k(f_2') \leq \ldots \leq k(f_\ell')$. Ekkor $k(f_i) \leq k(f_i')$ teljesül $\forall\ 1 \leq i \leq \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$.

Köv: (1) A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

(2) Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ F' c-feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$-ra.

(3) Ha a G gráf összefüggő, akkor G minden feszítő erdeje egy komponensből áll, azaz feszítőfa. Így a Kruskal-algoritmus minimális költségű feszítőfát talál bármely összefüggő G gráfban.

Megj: Összefüggő G gráf esetén a (2) következmény G minimális költségű feszítőfáinak karakterizációja.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)

Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)
2. Alkalmas adatstruktúra felhasználásával egy n csúcsú G gráf esetén bármely élről a döntés (az adatstruktúra karbantartásával együtt) megvalósítható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben. Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot m \cdot \log_2 n$ lépés.

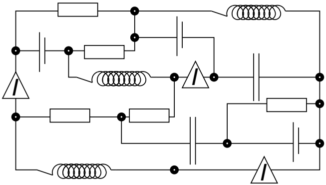
Az ötödik elem

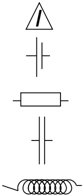
Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.
Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.
Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezése
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

1. m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
(A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)
2. Alkalmas adatstruktúra felhasználásával egy n csúcsú G gráf esetén bármely élről a döntés (az adatstruktúra karbantartásával együtt) megvalósítható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben. Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot m \cdot \log_2 n$ lépés.
A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető $konst \cdot (n + m) \cdot \log_2(n + m)$-mel.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás

feszültségforrás

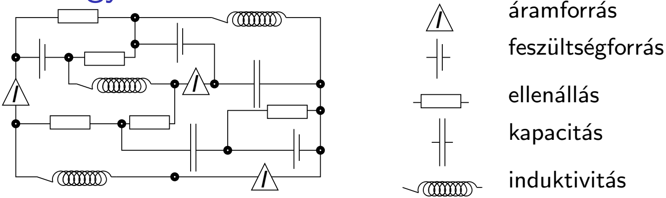
ellenállás

kapacitás

induktivitás

Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

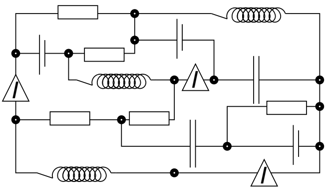
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

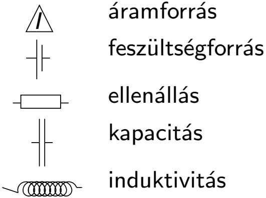


Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



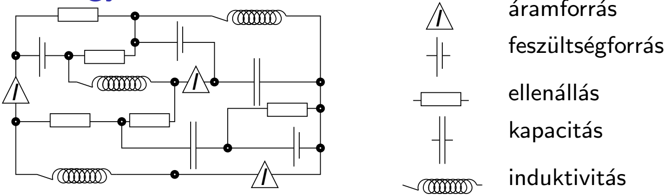


Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása



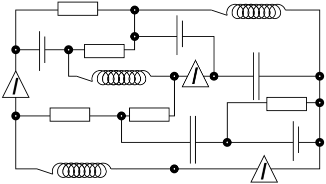
Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

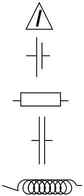
Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Kínzó kérdés: Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat?

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás

feszültségforrás

ellenállás

kapacitás

induktivitás

Tfh egy áramkör a fenti kétpólusú áramköri elemekből áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.

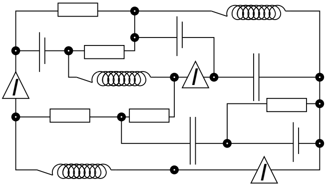
Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

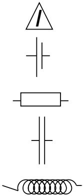
Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Kínzó kérdés: Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás

feszültségforrás

ellenállás

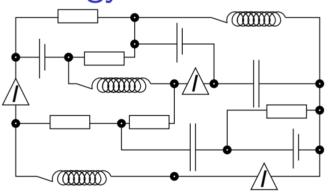
kapacitás

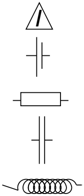
induktivitás

Kínzó kérdés: Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás

feszültségforrás

ellenállás

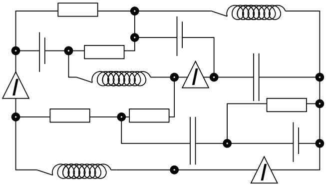
kapacitás

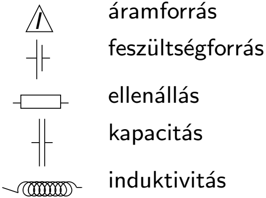
induktivitás

Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható. Nem egyértelmű a megoldás pl akkor, ha G-ben van olyan kör, ami kizárólag feszültségforrásokat tartalmaz. (Ha u.i. a feszültségek előjeles összege nem 0, sérül a huroktörvény, így nincs megoldás. Ha pedig ez az összeg 0, akkor viszont nem egyértelmű a megoldás, hiszen bármely megoldásból kapható egy másik, ahol ezen kör mentén valamekkora plusz áramot körbeküldünk.)

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

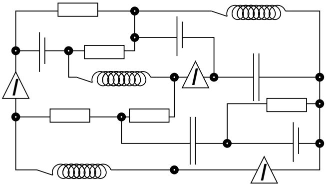


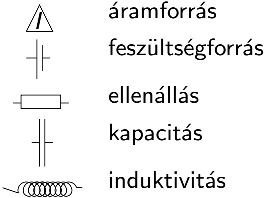


Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

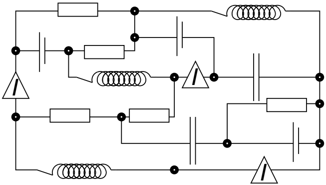


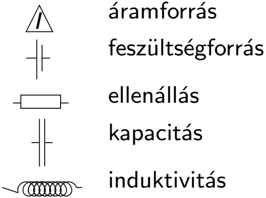


Kínzó kérdés: Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható. Nem egyértelmű a megoldás akkor sem, ha G csúcsai két részre oszthatók úgy, hogy a két rész közt futó éleken kizárólag áramforrások vannak. (Ha az áramok előjeles összege nem 0, akkor a csomóponti törvény sérül. Ha pedig 0, akkor bármely megoldásban az egyik rész potenciálját konstanssal megemelve egy másik megoldást kapnánk, tehát nem csak egy megoldás lenne.)

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

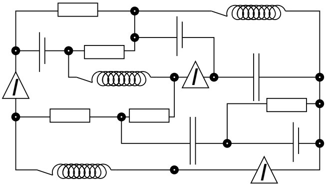


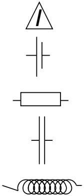


Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható.

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás

feszültségforrás

ellenállás

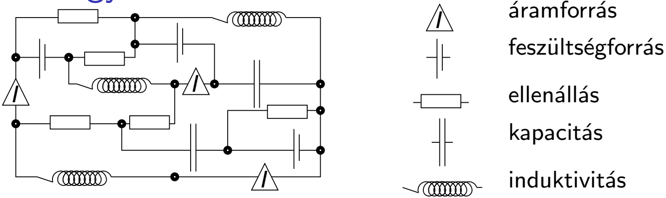
kapacitás

induktivitás

Kínzó kérdés: Mikor ,,értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható. Bizonyítható, hogy ha az iménti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat ,,értelmes”. Ennek egy lehetséges bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett (más okból) a lehető legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

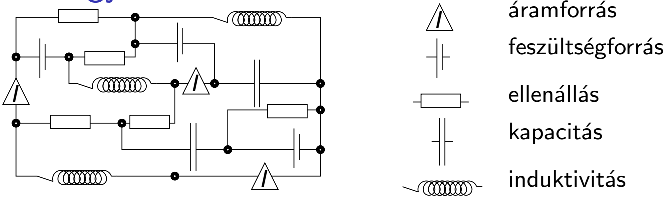


Kínzó kérdés: Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható. Bizonyítható, hogy ha az iménti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat ,,értelmes''. Ennek egy lehetséges bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett (más okból) a lehető legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

(Ráadásul a normál fához tartozó alapkörökre és alapvágásokra felírt hurok- ill. csomóponti törvények egyértelműen meg is határozzák a megoldást.)

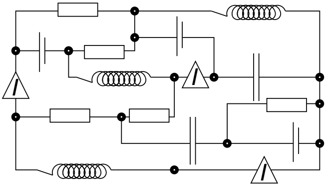
Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

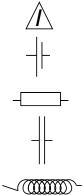


Kínzó kérdés: Mikor ,,értelmes'' egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható. Bizonyítható, hogy ha az iménti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat ,,értelmes''. Ennek egy lehetséges bizonyítéka a normál fa: *G* olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett (más okból) a lehető legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása





áramforrás

feszültségforrás

ellenállás

kapacitás

induktivitás

Kínzó kérdés: Mikor ,,értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható. Bizonyítható, hogy ha az iménti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat ,,értelmes”. Ennek egy lehetséges bizonyítéka a normál fa: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett (más okból) a lehető legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

Normál fa keresése: fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa. A normál fa létezése esetén pedig egyértelmű a megoldás, és ,,értelmes” a hálózat.

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Feszítőfához tartozó alapkör és alapvágás fogalma

Mit tanultunk ma?

- Feszítőfához tartozó alapkör és alapvágás fogalma
- Minimális költségű feszítőfa (feszítő erdő)

Mit tanultunk ma?

- Feszítőfához tartozó alapkör és alapvágás fogalma
- Minimális költségű feszítőfa (feszítő erdő)
- Kruskal mohó algoritmusa

Mit tanultunk ma?

- Feszítőfához tartozó alapkör és alapvágás fogalma
- Minimális költségű feszítőfa (feszítő erdő)
- Kruskal mohó algoritmusa
- Minimális költségű feszítő erdők struktúrája

Mit tanultunk ma?

- Feszítőfához tartozó alapkör és alapvágás fogalma
- Minimális költségű feszítőfa (feszítő erdő)
- Kruskal mohó algoritmusa
- Minimális költségű feszítő erdők struktúrája
- Normál fák és elektromos hálózatok kapcsolata

Mit tanultunk ma?

- Feszítőfához tartozó alapkör és alapvágás fogalma
- Minimális költségű feszítőfa (feszítő erdő)
- Kruskal mohó algoritmusa
- Minimális költségű feszítő erdők struktúrája
- Normál fák és elektromos hálózatok kapcsolata

Köszönöm a figyelmet!