A számítástudomány alapjai

Mátrixműveletek

2024. november 26.

Jó tanácsok ZH-ra

- Alaposan olvassuk el a feladatot, és értsük meg, mi a kérdés
- Indokoljuk, hogy mit és miért teszünk
- Elég az órán elhangzott ismeret a felhasználásakor világosan felidézni és helyesen alkalmazni
- Ha nem tudunk megoldani egy feladatot, idézzük fel az órán tanult kapcsolódó ismeretet, és jelezzük, hogyan lehetne ezt felhasználni a megoldásban.
  (Az utóbbi jelzése nélkül nem jár részpontszám.)
- A feladatban feltett kérdésre válaszoljunk
- Dolgozzunk átláthatóan, különösen mátrixokkal számoláskor

Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Példa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & 6006 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 42 \\ 7 & 42042 & 77 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ nem értelmes.

Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Köv: Ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, akkor (1) $A + B = B + A$,
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, (3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
(4) $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$, (5) $\lambda(\kappa A) = (\lambda\kappa)A$, továbbá
(6) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$, (7) $\lambda \cdot A^\top = (\lambda A)^\top$.

Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Köv: Ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, akkor (1) $A + B = B + A$,
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, (3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
(4) $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$, (5) $\lambda(\kappa A) = (\lambda\kappa)A$, továbbá
(6) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$, (7) $\lambda \cdot A^\top = (\lambda A)^\top$.

Vektorok egymással történő összeszorzását nem értelmeztük eddig. Most fogjuk, de bizonyos korlátokkal. Ehhez először azonos méretű vektorokat tanulunk meg összeszorozni.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata $\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata $\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$, (2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata $\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$, (2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata $\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$, (2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda (\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$, (2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,
(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ugyanez, másképp felírva: $\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,
(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ugyanez, másképp felírva: $\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$.

Megj: Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok merőlegessége azt jelenti, hogy $\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u} + \underline{v}\|^2$

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzata

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,

(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ugyanez, másképp felírva: $\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$.

Megj: Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok merőlegessége azt jelenti, hogy

$\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = (\underline{u}+\underline{v}) \cdot (\underline{u}+\underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{u} + \underline{v} \cdot \underline{v} + 2\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v}$, innen

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ adódik. Tehát $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{u} \perp \underline{v}$.

További vektorszorzások 3D-ben

Megf: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektorok $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$-vel jelölt vegyes szorzata az általuk feszített paralelepipedon előjeles térfogata.
Ez a térfogat az alábbi módon számítható ki oszlop szerinti kifejtéssel:

$$(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ -det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Megj: A vizsgált paralelepipedon térfogata megkapható $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$ alakban is, ahol $\underline{v} \times \underline{w}$ a jól ismert vektoriális szorzat amit a jobbkéz-szabály ill. a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által feszített paralelogramma területe segítségével definiálunk.
Azt kaptuk tehát, hogy $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$, ami igazolja hogy

$$(\underline{v} \times \underline{w}) = \begin{pmatrix} det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ -det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \end{array}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & \\ & & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

$$(1)\ \lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ill.} \quad \begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$

Biz: A skaláris szorzásról tanult azonosság szerint $\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot (\lambda \underline{v})$. Ezért mindhárom szorzatban az i-dik sor j-dik eleme az A i-dik sora és B j-dik oszlopa skaláris szorzatának a λ-szorosa ($\forall i, j$ esetén). $\square$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

(1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$.

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ill.} \quad \begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$.

Biz: Tudjuk, hogy $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$. Ezért $A(B+C)$ ill. $AB + AC$ i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B és C j-dik oszlopai összegének skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). A másik disztributivitás a skaláris szorzás $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ alakú, másik disztributív azonosságából következik. $\square$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times\ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ill.} \quad \begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.
(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ill.

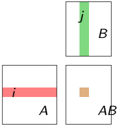
$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

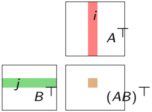
Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$

(2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$.

(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Biz: $(AB)^T$ j-dik sorának i-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának a skaláris szorzata, ami ugyanaz, mint $B^\top$ j-dik sorának és $A^\top$ i-dik oszlopának a skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). $\square$





Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ill.} \quad \begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$

(2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.

(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ill.} \quad \begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$.
(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Megj: Ha AB és BA is értelmes, akkor $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Ekkor $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $BA \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Azonban még $k = n$ esetén sem igaz általában, hogy $AB = BA$. A mátrixszorzás nem kommutatív.

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A\cdot B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ill.} \quad \begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda\cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda\cdot B)$

(2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$.

(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Megj: Ha AB és BA is értelmes, akkor $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Ekkor $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $BA \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Azonban még $k=n$ esetén sem igaz általában, hogy $AB = BA$. A mátrixszorzás nem kommutatív.

Tétel: A mátrixszorzás asszociatív (átzárójelezhető): ha AB és BC egyaránt értelmes, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times\ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \dots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&2&4\\0&-1&-2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&-2&-4\\2&1&2\end{pmatrix}\end{array}$$
ill.
$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ & \begin{pmatrix}2&4\\1&7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4&2\\7&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&7\\2&4\end{pmatrix} & \end{array}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok. (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$
(2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$.
(3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Megj: Ha AB és BA is értelmes, akkor $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Ekkor $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $BA \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Azonban még $k = n$ esetén sem igaz általában, hogy $AB = BA$. A mátrixszorzás nem kommutatív.

Tétel: A mátrixszorzás asszociatív (átzárójelezhető): ha AB és BC egyaránt értelmes, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Determinánsok szorzástétele: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

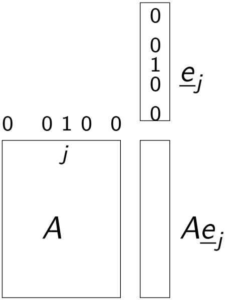
Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.
Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor (1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.

Biz: Könnyen látszik a definícióból.



Az $\underline{e}_i^\top$-tal szorzás hasonló tulajdonsága következik az oszlopokról szóló fenti állításból és a transzponáltak szorzásáról tanultakból. $\square$

Az itt látható ábra „transzponáltjának” segítségével sem nehéz erről meggyőződni.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

Biz: Az $A \cdot I_k$ mátrix j-dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j-dik oszlopa $\forall j$.
Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i-dik sora (1) miatt az A i-dik sora $\forall i$. $\square$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{a}_1,\ \underline{a}_2, \ldots,\ \underline{a}_k) \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

Biz: Az $A \cdot I_k$ mátrix j-dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j-dik oszlopa $\forall j$.
Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i-dik sora (1) miatt az A i-dik sora $\forall i$. $\square$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{a}_1, \ \underline{a}_2, \dots, \ \underline{a}_k) \quad (\ \underline{a}_1 \qquad\qquad)$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

Biz: Az $A \cdot I_k$ mátrix j-dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j-dik oszlopa $\forall j$.
Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i-dik sora (1) miatt az A i-dik sora $\forall i$. $\square$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{a}_1,\ \underline{a}_2, \dots,\ \underline{a}_k) \quad (\ \underline{a}_1, \underline{a}_2 \qquad\qquad)$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.
Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
Biz: Az $A \cdot I_k$ mátrix j-dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j-dik oszlopa $\forall j$.
Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i-dik sora (1) miatt az A i-dik sora $\forall i$. $\square$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (\underline{a}_1,\ \underline{a}_2, \ldots,\ \underline{a}_k) & (\ \underline{a}_1, \underline{a}_2,\ \ldots\ , \underline{a}_k) \end{array}$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.
Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.
Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Biz: Tfh $\underline{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Ekkor $\underline{u} = \lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{e}_k$, így aztán
$A \cdot \underline{u} = A \cdot (\lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{e}_k) = \lambda_1 A \cdot \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_k A \cdot \underline{e}_k$, és (1) miatt $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa $\forall j$.
A másik, $\underline{v}^\top \cdot A$-ról szóló tulajdonság hasonlóan igazolható. $\square$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$. Ekkor
(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.
Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.
Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$. Ekkor
(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.
(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, mégpedig az $\underline{a}_i$ sorban szereplő együtthatókkal.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$. Ekkor
(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.
(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, mégpedig az $\underline{a}_i$ sorban szereplő együtthatókkal.

Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.
Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.
Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$. Ekkor
(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.
(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, mégpedig az $\underline{a}_i$ sorban szereplő együtthatókkal.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$. Ekkor
(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.
(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, mégpedig az $\underline{a}_i$ sorban szereplő együtthatókkal.
(3) Ha a C mátrix minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, akkor C előáll AB alakban. Ha a C mátrix sorai az A sorainak lin.komb-i, akkor C előáll $C = BA$ alakban.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű egységmátrix $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$. Ekkor
(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.
(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, mégpedig az $\underline{a}_i$ sorban szereplő együtthatókkal.
(3) Ha a C mátrix minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, akkor C előáll AB alakban. Ha a C mátrix sorai az A sorainak lin.komb-i, akkor C előáll $C = BA$ alakban.

Köv: Ha A' ESÁ-okkal kapható A-ból, akkor $A' = BA$ alakú.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy az I_n egységmátrix az $n \times n$-es mátrixok között úgy viselkedik, mint a valós számok körében az 1: bármit megszorozva vele a ,,bármit" kapjuk: $X \cdot I_n = X, I_n \cdot Y = Y$.
Ha ilyen irányból nézünk a mátrixszorzásra, akkor a valós számokon értelmezett reciprokfogalom megfelelője a négyzetes mátrixok körében egy olyan $Y =$,,$1/X$" mátrix, amire $XY = I_n$. Látni fogjuk, hogy egyes mátrixoknak van ,,reciproka", másoknak pedig nincs, épp ahogy a 0-nak sincs a valósak körében. Megvizsgáljuk, hogyan kapható a ,,reciprok" és mitől függ, hogy van-e.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy az I_n egységmátrix az $n \times n$-es mátrixok között úgy viselkedik, mint a valós számok körében az 1: bármit megszorozva vele a ,,bármit" kapjuk: $X \cdot I_n = X, I_n \cdot Y = Y$.
Ha ilyen irányból nézünk a mátrixszorzásra, akkor a valós számokon értelmezett reciprokfogalom megfelelője a négyzetes mátrixok körében egy olyan $Y =$,,$1/X$" mátrix, amire $XY = I_n$. Látni fogjuk, hogy egyes mátrixoknak van ,,reciproka", másoknak pedig nincs, épp ahogy a 0-nak sincs a valósak körében. Megvizsgáljuk, hogyan kapható a ,,reciprok" és mitől függ, hogy van-e.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy az I_n egységmátrix az $n \times n$-es mátrixok között úgy viselkedik, mint a valós számok körében az 1: bármit megszorozva vele a ,,bármit'' kapjuk: $X \cdot I_n = X, I_n \cdot Y = Y$.
Ha ilyen irányból nézünk a mátrixszorzásra, akkor a valós számokon értelmezett reciprokfogalom megfelelője a négyzetes mátrixok körében egy olyan $Y =$,,$1/X$'' mátrix, amire $XY = I_n$. Látni fogjuk, hogy egyes mátrixoknak van ,,reciproka'', másoknak pedig nincs, épp ahogy a 0-nak sincs a valósak körében. Megvizsgáljuk, hogyan kapható a ,,reciprok'' és mitől függ, hogy van-e.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy az I_n egységmátrix az $n \times n$-es mátrixok között úgy viselkedik, mint a valós számok körében az 1: bármit megszorozva vele a ,,bármit'' kapjuk: $X \cdot I_n = X, I_n \cdot Y = Y$.

Ha ilyen irányból nézünk a mátrixszorzásra, akkor a valós számokon értelmezett reciprokfogalom megfelelője a négyzetes mátrixok körében egy olyan $Y =$,,$1/X$'' mátrix, amire $XY = I_n$. Látni fogjuk, hogy egyes mátrixoknak van ,,reciproka'', másoknak pedig nincs, épp ahogy a 0-nak sincs a valósak körében. Megvizsgáljuk, hogyan kapható a ,,reciprok'' és mitől függ, hogy van-e.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$. Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Biz: A mátrixszorzás asszociativitása (átzárójelezhetősége) miatt $A^B = A^B I_n = A^B(AA^J) = (A^B A)A^J = I_n A^J = A^J$. $\square$

Mátrix inverze

Láttuk, hogy az I_n egységmátrix az $n \times n$-es mátrixok között úgy viselkedik, mint a valós számok körében az 1: bármit megszorozva vele a „bármit" kapjuk: $X \cdot I_n = X, I_n \cdot Y = Y$.
Ha ilyen irányból nézünk a mátrixszorzásra, akkor a valós számokon értelmezett reciprokfogalom megfelelője a négyzetes mátrixok körében egy olyan $Y =$„$1/X$" mátrix, amire $XY = I_n$. Látni fogjuk, hogy egyes mátrixoknak van „reciproka", másoknak pedig nincs, épp ahogy a 0-nak sincs a valósak körében. Megvizsgáljuk, hogyan kapható a „reciprok" és mitől függ, hogy van-e.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$. Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy az I_n egységmátrix az $n \times n$-es mátrixok között úgy viselkedik, mint a valós számok körében az 1: bármit megszorozva vele a ,,bármit" kapjuk: $X \cdot I_n = X, I_n \cdot Y = Y$.
Ha ilyen irányból nézünk a mátrixszorzásra, akkor a valós számokon értelmezett reciprokfogalom megfelelője a négyzetes mátrixok körében egy olyan $Y =$,,$1/X$" mátrix, amire $XY = I_n$. Látni fogjuk, hogy egyes mátrixoknak van ,,reciproka", másoknak pedig nincs, épp ahogy a 0-nak sincs a valósak körében. Megvizsgáljuk, hogyan kapható a ,,reciprok" és mitől függ, hogy van-e.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Mátrix inverze

Láttuk, hogy az I_n egységmátrix az $n \times n$-es mátrixok között úgy viselkedik, mint a valós számok körében az 1: bármit megszorozva vele a ,,bármit'' kapjuk: $X \cdot I_n = X, I_n \cdot Y = Y$.
Ha ilyen irányból nézünk a mátrixszorzásra, akkor a valós számokon értelmezett reciprokfogalom megfelelője a négyzetes mátrixok körében egy olyan $Y =$,,$1/X$'' mátrix, amire $XY = I_n$. Látni fogjuk, hogy egyes mátrixoknak van ,,reciproka'', másoknak pedig nincs, épp ahogy a 0-nak sincs a valósak körében. Megvizsgáljuk, hogyan kapható a ,,reciprok'' és mitől függ, hogy van-e.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Biz: Később bizonyítjuk.

Mátrix inverze

Láttuk, hogy az I_n egységmátrix az $n \times n$-es mátrixok között úgy viselkedik, mint a valós számok körében az 1: bármit megszorozva vele a „bármit" kapjuk: $X \cdot I_n = X, I_n \cdot Y = Y$.
Ha ilyen irányból nézünk a mátrixszorzásra, akkor a valós számokon értelmezett reciprokfogalom megfelelője a négyzetes mátrixok körében egy olyan $Y =$„$1/X$" mátrix, amire $XY = I_n$. Látni fogjuk, hogy egyes mátrixoknak van „reciproka", másoknak pedig nincs, épp ahogy a 0-nak sincs a valósak körében. Megvizsgáljuk, hogyan kapható a „reciprok" és mitől függ, hogy van-e.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Kínzó kérdés:
Miféle mátrixoknak van inverze, és hogyan lehet azt megtalálni?

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Kínzó kérdés:
Miféle mátrixoknak van inverze, és hogyan lehet azt megtalálni?
Részleges válasz: Csak négyzetes mátrixnak lehet inverze.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^BA = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Biz: Ha A balról invertálható, akkor $A^BA = I_n$. A mátrixszorzás előbb látott különös tulajdonsága miatt I_n minden sora az A sorainak egy-egy lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben, ezért A sorainak is generálniuk kell a teljes $\mathbb{R}^n$ teret. Ezért A soraiból kiválasztható $\mathbb{R}^n$ egy bázisa. Mivel A-nak n sora és a bázisnak n eleme van, ez a bázis csakis összes sor együttese lehet. Márpedig ha A sorai bázist alkotnak, akkor persze lin.ftn-ek is. $\square$

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Biz: Mivel A sorai lineárisan függetlenek, ezért A sorai egy n-dimenziós alteret, konkrétan a teljes $\mathbb{R}^n$ teret generálják.
Alakítsuk az A mátrixot ESÁ-ok segítségével RLA mátrixszá! Az így kapott A' mátrix n sora is a teljes $\mathbb{R}^n$ teret generálja. Ezért A' sorai lineárisan függetlenek, így A'-nek nem lehet csupa0 sora.
Tehát $A' = I_n$. □

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^BA = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
Biz: Könnyű ellenőrizni, hogy ha I_n-en elvégzünk egy ESÁ-t, és a kapott I' mátrixszal balról megszorzunk egy $n \times k$ méretű A mátrixot, akkor a szorzatot megkaphatjuk úgy is, hogy A-n végrehajtjuk ugyanezt az ESÁ-t. $\square$

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok egymásutánja is egy mátrixszal történő balszorzás.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok egymásutánja is egy mátrixszal történő balszorzás.
Biz: Ha az A mátrixon ESÁ-ok egymásutánját végezzük, akkor ezek mindegyike egy-egy balszorzásnak felel meg, így k db ESÁ után kapott mátrix $X_k(X_{k-1}(\ldots(X_1A))\ldots)$. Ez a mátrixszorzás átzárójelezhetősége miatt felírható $((\ldots(X_kX_{k-1})\ldots X_1)A$ alakban is, vagyis A-t az $X = ((\ldots(X_kX_{k-1})\ldots X_1)$ mátrixszal szorozzuk. $\square$

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok egymásutánja is egy mátrixszal történő balszorzás.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok egymásutánja is egy mátrixszal történő balszorzás.
(3) Ha ESÁ-okkal A-ból I_n lesz, akkor A^B-vel szoroztunk balról.

Mátrix inverze

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix balinverze az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$.
Az A^J mátrix az A jobbinverze, ha $AA^J = I_n$.
Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.
Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali.
Ezért A inverzét a továbbiakban A^{-1}-zel jelöljük.
Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.
Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.
Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok egymásutánja is egy mátrixszal történő balszorzás.
(3) Ha ESÁ-okkal A-ból I_n lesz, akkor A^B-vel szoroztunk balról.
Köv: Ha az $(A|I_n)$ mátrixból ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk, és A helyén megjelenik I_n, akkor I_n helyén A^B jelenik meg. Ha A helyén nem jelenik meg I_n, akkor A-nak nincs balinverze.

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{I}} \mapsto \boxed{\mathrm{I}} - \boxed{\mathrm{II}}$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{III}} \mapsto \boxed{\text{III}} - 2\boxed{\text{II}}$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{II}} \mapsto \boxed{\mathrm{II}} - 3\,\boxed{\mathrm{III}}$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldalon egységmátrixot kaptunk, ezért $A^B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$

Inverzszámítás

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldalon egységmátrixot kaptunk, ezért $A^B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & & & & -1 & -8 & 4 \\ & & & & & & 1 & 6 & -3 \\ & & & & & & 2 & 17 & -8 \\ \hline & & & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -8 & 4 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 2 & 17 & -8 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}$$

győztünk, sőt: $A^B = A^J$.

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{I}} \mapsto \boxed{\mathrm{I}} - \boxed{\mathrm{II}}$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{III}} \mapsto \boxed{\text{III}} - 2\,\boxed{\text{II}}$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\text{II}} \mapsto \boxed{\text{II}} - 3\boxed{\text{III}}$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldali részben csupa0 sort kaptunk, tehát az A sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért A sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis I_n biztosan nem kapható meg A-ból balszorzással, azaz A-nak nincs balinverze.

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldali részben csupa0 sort kaptunk, tehát az A sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért A sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis I_n biztosan nem kapható meg A-ból balszorzással, azaz A-nak nincs balinverze.

Köv: Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sorai lin.ftn-ek, akkor A-nak van balinverze, ha A sorai nem lin.ftn-ek, akkor A-nak nincs balinverze.

Inverzszámítás II.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét!
Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

A bal oldali részben csupa0 sort kaptunk, tehát az A sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért A sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis I_n biztosan nem kapható meg A-ból balszorzással, azaz A-nak nincs balinverze.

Köv: Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix sorai lin.ftn-ek, akkor A-nak van balinverze, ha A sorai nem lin.ftn-ek, akkor A-nak nincs balinverze.

Ugyanez a transzponáltra a jobbinverz létezését karakterizálja:
Köv: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oszlopai lin.ftn-ek, akkor A-nak van jobbinverze, ha pedig A oszlopai nem lin.ftn-ek, akkor nincs.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
$(A \text{ sorai lin.ftn-ek}) \Longleftrightarrow (|A| \neq 0)$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Biz: Legyen V az A sorai által generált altér, és A' az A-ból ESÁ-okkal kapható RLA mátrix (ami felső háromszögmátrix).
Mivel ESÁ nem változtat a sorok által generált altéren, ezért A' sorai is V-t generálják. Így (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($\dim V = n$) $\iff$ (A' sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A'-nek nincs csupa0 sora) $\iff$ (A' minden sorában van v1) $\iff$ ($|A'| = 1$) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Az utolsó ekvivalencia azért igaz, mert ESÁ nem változtat a determináns 0/nem0 voltán. $\square$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
$(A \text{ sorai lin.ftn-ek}) \iff (|A| \neq 0)$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)

Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Biz: (A-nak van balinverze) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ ($|A^\top| \neq 0$) $\iff$ ($A^\top$ sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (A-nak van jobbinverze) $\square$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\Longleftrightarrow$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\Longleftrightarrow$ (A-nak van jobbinverze)

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Biz: Az AB i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának skaláris szorzata, azaz
$a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \ldots + a_{i,n}A_{j,n}$, ahol $a_{i,k}$ az A mátrix i-dik sorának j-dik elemét jelenti. Ha $i = j$, akkor ez az összeg épp az A i-dik sor szerinti kifejtése, vagyis $|A|$. Ha $i \neq j$, akkor ez az összeg egy ú.n. ferde kifejtés: annak az A' mátrixnak az i-dik sor szerinti kifejtése, amit A-ból úgy kapunk, hogy a j-dik sor helyére az i-ediket írjuk. Mivel A' két sora egyforma, ezért $|A'| = 0$. $\square$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\Longleftrightarrow$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\Longleftrightarrow$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.
Biz: $A \cdot \left(\frac{1}{|A|}B\right) = \frac{1}{|A|}(AB) = \frac{1}{|A|}(|A|I_n) = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$ $\square$

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|} B$.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.
Köv: Négyzetes mátrix inverzének kiszámítására két módszerünk is van: vagy egy $n \times 2n$ méretű mátrixból RLA mátrixot készítünk ESÁ-okkal, vagy kiszámítjuk $|A|$-t és az összes előjeles aldeterminánst.

Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)
Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)
Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.
Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.
Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.
Köv: Négyzetes mátrix inverzének kiszámítására két módszerünk is van: vagy egy $n \times 2n$ méretű mátrixból RLA mátrixot készítünk ESÁ-okkal, vagy kiszámítjuk $|A|$-t és az összes előjeles aldeterminánst.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix reguláris (avagy invertálható), ha A-nak van inverze, és szinguláris ha nincs.
Köv: Tfh A négyzetes mátrix. Ekkor (A reguláris) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (az A-ból kapott RLA mátrix minden sorában van v1)

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)
- Mátrixszorzás és elemi tulajdonságai (disztributivitások, asszociativitások, transzponálás)

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)
- Mátrixszorzás és elemi tulajdonságai (disztributivitások, asszociativitások, transzponálás)
- Szorzatmátrix sorainak és oszlopainak viszonya a tényezők soraihoz és oszlopaihoz

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)
- Mátrixszorzás és elemi tulajdonságai (disztributivitások, asszociativitások, transzponálás)
- Szorzatmátrix sorainak és oszlopainak viszonya a tényezők soraihoz és oszlopaihoz
- Négyzetes mátrixok ,,reciproka": balinverz és jobbinverz

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)
- Mátrixszorzás és elemi tulajdonságai (disztributivitások, asszociativitások, transzponálás)
- Szorzatmátrix sorainak és oszlopainak viszonya a tényezők soraihoz és oszlopaihoz
- Négyzetes mátrixok ,,reciproka": balinverz és jobbinverz
- Inverz létezése = sorok, oszlopok lineáris függetlensége

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)
- Mátrixszorzás és elemi tulajdonságai (disztributivitások, asszociativitások, transzponálás)
- Szorzatmátrix sorainak és oszlopainak viszonya a tényezők soraihoz és oszlopaihoz
- Négyzetes mátrixok „reciproka”: balinverz és jobbinverz
- Inverz létezése = sorok, oszlopok lineáris függetlensége
- Inverzszámítás ESÁ-okkal a kibővített mátrixon

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)
- Mátrixszorzás és elemi tulajdonságai (disztributivitások, asszociativitások, transzponálás)
- Szorzatmátrix sorainak és oszlopainak viszonya a tényezők soraihoz és oszlopaihoz
- Négyzetes mátrixok „reciproka": balinverz és jobbinverz
- Inverz létezése = sorok, oszlopok lineáris függetlensége
- Inverzszámítás ESÁ-okkal a kibővített mátrixon
- Reguláris (invertálható) mátrixok jellemzése

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)
- Mátrixszorzás és elemi tulajdonságai (disztributivitások, asszociativitások, transzponálás)
- Szorzatmátrix sorainak és oszlopainak viszonya a tényezők soraihoz és oszlopaihoz
- Négyzetes mátrixok „reciproka”: balinverz és jobbinverz
- Inverz létezése = sorok, oszlopok lineáris függetlensége
- Inverzszámítás ESÁ-okkal a kibővített mátrixon
- Reguláris (invertálható) mátrixok jellemzése
- Inverzmátrix képlete előjeles aldeterminánsokkal

Mit tanultunk ma?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)
- Mátrixszorzás és elemi tulajdonságai (disztributivitások, asszociativitások, transzponálás)
- Szorzatmátrix sorainak és oszlopainak viszonya a tényezők soraihoz és oszlopaihoz
- Négyzetes mátrixok „reciproka”: balinverz és jobbinverz
- Inverz létezése = sorok, oszlopok lineáris függetlensége
- Inverzszámítás ESÁ-okkal a kibővített mátrixon
- Reguláris (invertálható) mátrixok jellemzése
- Inverzmátrix képlete előjeles aldeterminánsokkal

Köszönöm a figyelmet!

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Ha az A mátrixszal történő balszorzással definiálunk egy, az $\mathbb{R}^n$ térből az $\mathbb{R}^k$ térbe képező függvényt, akkor a fenti tulajdonságok teljesülnek. Ennek érdemes nevet adni, mert fontosak azok a függvények, amik rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Példa: Lin.lekép $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}^2$-be (a szokásos helyvektorokon) az origóra tükrözés, az origó körüli forgatás, az x tengelyre vetítés, vagy egy origón átmenő egyenesre tükrözés. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, ha pl. az sík minden (x, y) pontjához a tér $(2x, 0, y/2)$ pontját rendeljük.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda\underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u}+\underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda\underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixra az A-val történő balszorzás $\mathbb{R}^k$-ból $\mathbb{R}^n$-be ható lineáris leképezést definiál.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixra az A-val történő balszorzás $\mathbb{R}^k$-ból $\mathbb{R}^n$-be ható lineáris leképezést definiál.

Kínzó kérdés: Minden lin.leképezés megadható mátrixszorzással?

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixra az A-val történő balszorzás $\mathbb{R}^k$-ból $\mathbb{R}^n$-be ható lineáris leképezést definiál.

Kínzó kérdés: Minden lin.leképezés megadható mátrixszorzással?

Megnyugtató válasz: Igen.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda\underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u}+\underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda\underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixra az A-val történő balszorzás $\mathbb{R}^k$-ból $\mathbb{R}^n$-be ható lineáris leképezést definiál.

Kínzó kérdés: Minden lin.leképezés megadható mátrixszorzással?

Megnyugtató válasz: Igen.

Ezt most igazolni fogjuk.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \ \ \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Biz: $\Rightarrow$: Mivel f additív és homogén, ezért
$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \ldots + f(\lambda_k \underline{u}_k) =$
$\lambda_1 f(\underline{u}_1) + \ldots + \lambda_k f(\underline{u}_k)$, azaz f zárt a lin.komb-ra.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Biz: $\Rightarrow$: Mivel f additív és homogén, ezért
$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \ldots + f(\lambda_k \underline{u}_k) =$
$\lambda_1 f(\underline{u}_1) + \ldots + \lambda_k f(\underline{u}_k)$, azaz f zárt a lin.komb-ra.
$\Leftarrow$: Ha f zárt a lin.komb-ra, akkor
$f(\lambda \underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$, hisz λu az u lin.komb-ja, továbbá
$f(\underline{u} + \underline{v}) = f(1\underline{u} + 1\underline{v}) = 1f(\underline{u}) + 1f(\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$,
tehát f homogén is és additív is. Egyszóval f lin.lekép. $\square$

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.
Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \;\; \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.
Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Annak az igazolásához, hogy minden f lineáris leképezés előáll mátrixszal történő balszorzással, elegendő csupán azt megmutatni, hogy van olyan $[f]$ mátrix, amire $f(\underline{b}_i) = [f]\underline{b}_i$ teljesül $\forall \underline{b}_i$-re.
Legyen $\underline{u} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \ldots$ tetszőleges. Ekkor a fentiek alapján $f(\underline{u}) = \lambda_1 f(\underline{b}_1) + \lambda_2 f(\underline{b}_2) + \ldots = \lambda_1 [f]\underline{b}_1 + \lambda_2 [f]\underline{b}_2 + \ldots = [f]\underline{u}$.
Ezért minden $\underline{u}$ vektor f szerinti $f(\underline{u})$ képe megkapható az $[f]$ mátrixszal történő balszorzással.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f: U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f: U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f: U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.leképⅆ $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Biz: Legyen $B = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m)$, és $C = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m)$. A Lemma állítása ekvivalens azzal, hogy van olyan A mátrix, amire $A \cdot B = C$. A mátrixszorzás különös tulajdonsága kapcsán azt láttuk, hogy pontosan akkor van ilyen A ha C minden sora előáll B sorainak lineáris kombinációjaként. Ezt fogjuk tehát most igazolni.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \ \ \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Biz:

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f: U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f: U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f: U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Biz: Mivel B bázis, ezért B oszlopai lin.ftn-ek. Így a B ESÁ-okkal RLA mátrixszá transzformált alakja $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m)$, azaz I_m áll az RLA mátrix tetején. Ezért I_m minden sora előáll a B sorainak lineáris kombinációjaként. Minden m oszlopból álló mátrix, így C is megkapható I_m sorainak lineáris kombinációjaként. Tehát C sorai előállnak nem csak I_m, de B sorainak lin.komb-jaként is. $\square$

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetsz. $f : U \to V$ lin.lekép esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.
(Azaz minden lin.leképezés tkp egy mátrixszal történő balszorzás.)

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetsz. $f : U \to V$ lin.lekép esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetsz. $f : U \to V$ lin.lekép esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

Biz: Legyen $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ az U altér egy bázisa. A fenti Lemma szerint van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{b}_i = f(\underline{b}_i)$ teljesül minden báziselemre. Az $\underline{u} \mapsto [f]\underline{u}$ olyan lineáris leképezés, ami a $\underline{b}_i$ báziselemeken megegyezik f-fel. Mivel a lineáris leképezést a báziselemek képe meghatározza, ezért $f(\underline{u}) = [f]\underline{u}$ $\forall \underline{u} \in U$. $\square$

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetsz. $f : U \to V$ lin.lekép esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ lineáris leképezés, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetsz. $f : U \to V$ lin.lekép esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

Azt fogjuk most megfigyelni, hogyan is kell az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixát kiszámítani a báziselemek képeinek segítségével.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Megj: A fenti Állítás azt mondja ki, hogy az f lineáris leképezést balszorzással megvalósító $[f]$ mátrixot úgy kapjuk meg, hogy a standard bázis elemeinek képeit, mint oszlopvektorokat egy mátrixba rendezzük.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Biz: Azt kell megmutatni, hogy $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$-re.
Láttuk, hogy $[f]\underline{e}_i = (f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \ldots, f(\underline{e}_n))\,\underline{e}_i = f(\underline{e}_i)$
Ha tehát $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i$, akkor

$$[f]\underline{v} = [f](\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [f]\underline{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\underline{e}_i) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = f(\underline{v})$$

(A 2-dik és 4-dik egyenlőségnél f ill $[f]$ lineáris kombináció tartó tulajdonságát, a 3-diknál pedig a bizonyítás elején szereplő megfigyelést használtuk.) $\square$

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.

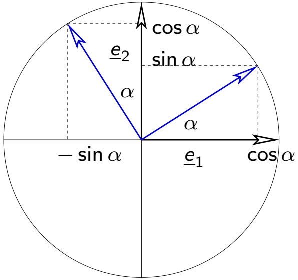
Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.



Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.
Megj: A Lemma azt mondja ki, hogy lineáris leképezések egymásutánja olyan lineáris leképezés, aminek a mátrixa a két lineáris leképezés mátrixának a szorzata, ahol a bal oldali tényező a másodiknak elvégzett leképezés mátrixa.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f]=(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_k))$.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$, így $[f_\alpha]=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ és $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g\circ f)(\underline{v})=g(f(\underline{v}))$ és $[g\circ f]=[g][f]$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.
Biz: Először $g \circ f$ linearitását igazoljuk:
$g(f(\lambda\underline{u})) = g(\lambda f(\underline{u})) = \lambda g(f(\underline{u}))$ homogén, ill.
$g(f(\underline{u} + \underline{v})) = g(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) = g(f(\underline{u})) + g(f(\underline{v}))$ lineáris.
Tehát $g \circ f$ csakugyan lineáris leképezés.

Végül a kompozíciómátrixról szóló képlet helyességét bizonyítjuk.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.
Biz:

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f]=(f(\underline{e}_1),\dots,f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$, így $[f_\alpha]=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ és $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g\circ f)(\underline{v})=g(f(\underline{v}))$ és $[g\circ f]=[g][f]$.
Biz: A tanultak szerint $[g\circ f]$ i-dik oszlopa $g(f(\underline{e}_i))=[g]([f]\underline{e}_i)$.
Láttuk, hogy $[f]\underline{e}_i$ az $[f]$ i-dik oszlopa, így $[g]([f]\underline{e}_i)$ a $[g]$ mátrix szorzata az $[f]$ mátrix i-dik oszlopával.
Ez pedig nem más, mint az $[g][f]$ szorzatmátrix i-dik oszlopa.
Ezek szerint a $[g\circ f]$ mátrix i-dik oszlopa megegyezik a $[g][f]$ mátrix i-dik oszlopával ($\forall i$-re), így aztán $[g\circ f]=[g][f]$. $\square$

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.
Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f]=(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$, így $[f_\alpha]=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ és $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^\ell$ lin.leképek. Ekkor $g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g\circ f)(\underline{v})=g(f(\underline{v}))$ és $[g\circ f]=[g][f]$.
Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC)=(AB)C$.
Biz: Legyenek A,B ill. C az f,g és h lineáris leképezések mátrixai. Ekkor $A(BC)$ az $f\circ(g\circ h)$, $(AB)C$ pedig az $(f\circ g)\circ h$ leképezés mátrixa. Márpedig $f\circ(g\circ h)(\underline{v})=f(g(h(\underline{v})))=(f\circ g)\circ h(\underline{v})$ miatt e két leképezés megegyezik, így a mátrixaik is azonosak. $\square$

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f]=(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$, így $[f_\alpha]=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ és $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g\circ f)(\underline{v})=g(f(\underline{v}))$ és $[g\circ f]=[g][f]$.
Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC)=(AB)C$.

Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lin.leкép., akkor $[f]=(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_k))$.
Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixa.
Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$, így $[f_\alpha]=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.
Lemma: Tfh $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ és $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^\ell$ lin.leкép-ek. Ekkor $g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\ell$ is lin.leкép, ahol $(g\circ f)(\underline{v})=g(f(\underline{v}))$ és $[g\circ f]=[g][f]$.
Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC)=(AB)C$.
Köv: A fenti példában szereplő elforgatásokra igaz, hogy $f_{\alpha+\beta}=f_\alpha\circ f_\beta$, így $\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=[f_{\alpha+\beta}]=[f_\alpha][f_\beta]=$
$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}$
Ebből pedig $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ill. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$ adódik. $\square$
Váratlan módszerrel igazoltuk a trigonometrikus függvények addíciós képletét.