A számítástudomány alapjai

Mátrix rangja és mátrixegyenletek

2024. december 3.

Mátrix rangja

Láttuk, hogy egy négyzetes mátrixnak vagy a sorai is és az oszlopai is lin.ftn-ek, vagy se a sorai, se az oszlopai nem azok. Lehet-e általánosítani ezt a megfigyelést nem négyzetes mátrixokra?

Ebben a formában nem.

Ha mondjuk $n < k$ és egy $n \times k$ méretű mátrix sorai függetlenek, akkor az oszlopok n magasságú vektorok, tehát legfeljebb n lehet közülük független, k semmiképp.

Van azonban egy jól használható általánosítása a fenti ténynek. (Többek között) azt fogjuk megmutatni, hogy ha egy M mátrixnak van k lin.ftn sora, akkor van k lin.ftn oszlopa is, és viszont.

Ebből következik pl. a négyzetes mátrixok fenti tulajdonsága is.

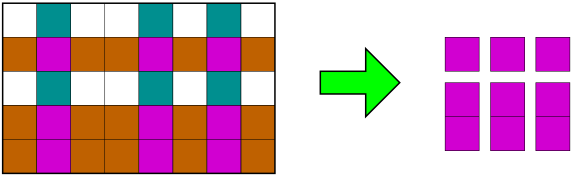
Mátrix rangja

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megj: Az A mátrix $m \times m$ méretű négyzetes részmátrixa alatt olyan mátrixot értünk, amit úgy kapunk, hogy kiválasztjuk A m sorát és m oszlopát. A részmátrixot a kiválasztott sorok-oszlopok metszéspontjában álló elemek alkotják. Nem kell tehát a kiválasztott soroknak vagy oszlopoknak szomszédosaknak lenniük.



Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.

Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.

Biz: (1): A transzponált sorai a mátrix oszlopainak felelnek meg.
(2) Legyen B az $\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ altér egy sorvektorokból álló bázisa. Ekkor egyrészt $|B| = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$, másrészt B a sorok egy maximális méretű lin.ftn részhalmaza, ezért $|B| = s(A)$. Tehát $s(A) = |B| = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$.
Az oszloprangra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható az oszlopvektorok segítségével. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Biz: Sorrang Minden ESÁ után keletkező sort generálnak A sorai. Ezért ESÁ után a sorok által generált altér nem bővülhet. Láttuk, hogy minden ESÁ visszaalakítható legfeljebb 3 ESÁ-sal. Ezért ESÁ után a sorok által generált altér nem is szűkülhet, u.i. a visszaalakításkor nem tudna visszabővülni. Tehát ESÁ után a sorok által generált altér nem változik. Ekkor a dimenziója sem változik, ami pedig az előző megfigyelés miatt épp a szóban forgó sorrang.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k + 1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k + 1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Biz:

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Biz: Oszloprang Ha A egy oszlopa előáll néhány másik oszlop lineáris kombinációjaként, akkor ugyanez az oszlop ugyanilyen együtthatókkal szintén előáll egy ESÁ után is. Ezért ha néhány oszlop az oszlopok által generált altér bázisát alkotja, akkor ugyanezek az oszlopok ESÁ után is generátorrendszert alkotnak, és tartalmaznak egy bázist. Az ESÁ visszaalakíthatósága miatt ez a bázis nem szűkülhet, így az oszlopok generálta altér dimenziója (vagyis az oszloprang) sem változik ESÁ után.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots \rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots \rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Biz: A v1-ekhez tartozó oszlopok az oszlopok által generált altér bázisát alkotják, így $o(A)$ a v1-ek száma.
RLA mátrix csupa 0 sorait elhagyva a maradék (v1-t tartalmazó) sorok lin.ftn-ek, hisz egyik se áll elő a többi lin.komb-jaként. Ezért $s(A)$ is a v1-ek száma, tehát $s(A) = o(A)$. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k + 1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k + 1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Biz: Legyen A' az A-ból ESÁ-okkal kapott RLA mátrix. Ekkor $s(A) = s(A') = o(A') = o(A)$. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.

Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.

Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.

Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.

Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.

Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$

Biz: $\Rightarrow$: Tfh van k lin.ftn sor, ezek alkossák az A' mátrixot. Ekkor $k = s(A') = o(A')$: A'-nek van k lin.ftn oszlopa. Alkossák ezek az A'' mátrixot. Mivel $o(A'') = k = s(A'')$, A'' az A egy $k \times k$ méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixa. Tehát $d(A) \geq k$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots \rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots \rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Biz:

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A)=k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A)=k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A)=s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A)=o(A)=$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A)=o(A)$.
Állítás: $(s(A)\geq k) \iff (d(A)\geq k)$
Biz: $\Leftarrow$: Tfh A'' egy $k\times k$-as nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix. Az inverzről tanultaknál láttuk, hogy A'' sorai lin.ftn-ek. Ezért az A'' sorainak megfelelő A-beli sorok is lin.ftn-ek, vagyis $s(A)\geq k$. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Biz: Ha $s(A) = k$, akkor az előző állítás miatt $d(A) \geq k$.
Ha pedig $d(A) = k$, akkor $s(A) \geq k$. Ezért $s(A) = d(A)$.
Korábban láttuk, hogy $s(A) = o(A)$. $\square$

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots \rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots \rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.
Így tehát nem csak definiáltuk a rangot, hanem azt is látjuk, hogy a rangra három lényegesen különböző módon tudunk gondolni.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.
Rang meghatározása:

Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A sorrangja $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A oszloprangja $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.
Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.
Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.
Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.
Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.
Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$
Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix rangja $r(A) = s(A)$.
Rang meghatározása:
ESÁ-okkal képzett (R)LA mátrix v1-ei száma.

A mátrixrang két tulajdonsága

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

A mátrixrang két tulajdonsága

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

Biz: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel $A+B$ minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért $A+B$ sorait generálják az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ vektorok is. Az $A+B$ sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ teljesül. $\square$

A mátrixrang két tulajdonsága

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.
Biz: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel $A+B$ minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért $A+B$ soraít generálják az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ vektorok is. Az $A+B$ sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ teljesül. $\square$
Lemma: $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell} \Rightarrow r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.

A mátrixrang két tulajdonsága

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.
Biz: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel $A+B$ minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért $A+B$ sorait generálják az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ vektorok is. Az $A+B$ sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ teljesül. □

Lemma: $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell} \Rightarrow r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.
Biz: Láttuk, hogy AB minden sora a B sorainak lin.komb-ja, ezért AB sorvektorai által generált altér része a B sorvektorai által generált altérnek. Így az első altér dimenziója nem lehet nagyobb a másodikénál, vagyis $r(AB) = s(AB) \leq s(B) = r(B)$.
Hasonlóan, AB minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, tehát az AB oszlopai által generált altér dimenziója nem nagyobb az A oszlopai által generáltnál: $r(AB) = o(AB) \leq o(A) = r(A)$.
Innen a tétel állítása közvetlenül adódik. □

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során?

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ 7 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 11 \end{array}\right)$$

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & & \\ \begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} & \leftrightarrow & A\underline{x} = \underline{b} \end{array}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Láttuk: Tetsz. A, B mátrixra (B előáll $AX = B$ alakban) $\iff$

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Láttuk: Tetsz. A, B mátrixra (B előáll $AX = B$ alakban) $\iff$ (B minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja)

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Láttuk: Tetsz. A, B mátrixra (B előáll $AX = B$ alakban) $\iff$ (B minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja)

Köv: Ha A oszlopai $A^1, \ldots$, akkor $(\exists \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}) \iff (\underline{b} \in \langle A^1, \ldots \rangle)$ $\iff (\langle A^1, \ldots \rangle = \langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle) \iff (\dim \langle A^1, \ldots \rangle = \dim \langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle)$ $\iff (r(A) = r(A|\underline{b}))$.

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek elméletében fontos kérdés, hogy mitől függ a megoldás egyértelműsége. Korábban már láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek elméletében fontos kérdés, hogy mitől függ a megoldás egyértelműsége. Korábban már láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.
Kínzó kérdés: Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek elméletében fontos kérdés, hogy mitől függ a megoldás egyértelműsége. Korábban már láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

Válasz: Ez a kérdés négyzetes együtthatómátrixra érdekes igazán. Ha ugyanis az együtthatómátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor a tanult módszerrel történő megoldás során vagy tilos sort kapunk, vagy lesz szabad paraméter, így a megoldás biztosan nem egyértelmű.

Ha pedig a sorok száma több az oszlopokénál, akkor a tanult módszerrel történő megoldás során kapott RLA mátrix együtthatókat tartalmazó részének lesz csupa0 sora, ezért az, hogy van-e tilos sor függ a konkrét $\underline{b}$ vektortól is.

Ha tehát az együtthatómátrix nem négyzetes, akkor biztosan tartozik hozzá olyan lineáris egyenletrendszer, amelyiknek nincs egyértelmű megoldása.

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek elméletében fontos kérdés, hogy mitől függ a megoldás egyértelműsége. Korábban már láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

Válasz: Ez a kérdés négyzetes együtthatómátrixra érdekes igazán.

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek elméletében fontos kérdés, hogy mitől függ a megoldás egyértelműsége. Korábban már láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

Válasz: Ez a kérdés négyzetes együtthatómátrixra érdekes igazán.

Állítás: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $(A\underline{x} = \underline{b}$ egyért. megoldható$) \Longleftrightarrow (|A| \neq 0)$

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek elméletében fontos kérdés, hogy mitől függ a megoldás egyértelműsége. Korábban már láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

Válasz: Ez a kérdés négyzetes együtthatómátrixra érdekes igazán.

Állítás: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $(A\underline{x} = \underline{b}$ egyért. megoldható$) \iff (|A| \neq 0)$

Biz: $\Rightarrow$: Tfh $|A| = 0$. Ekkor A oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért A oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja $\underline{0}$-t ad: $\exists \underline{y} \neq \underline{0}: \; A\underline{y} = \underline{0}$. Ezért ha $\underline{x}$ az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldása, akkor $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$ miatt $\underline{x} + \underline{y}$ is megoldás. Tehát az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenletnek ha van is megoldása, az nem egyértelmű.

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

A lineáris egyenletrendszerek elméletében fontos kérdés, hogy mitől függ a megoldás egyértelműsége. Korábban már láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

Válasz: Ez a kérdés négyzetes együtthatómátrixra érdekes igazán.

Állítás: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $(A\underline{x} = \underline{b}$ egyért. megoldható$) \Longleftrightarrow (|A| \neq 0)$

Biz: $\Rightarrow$: Tfh $|A| = 0$. Ekkor A oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért A oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja $\underline{0}$-t ad: $\exists \underline{y} \neq \underline{0}: \ A\underline{y} = \underline{0}$. Ezért ha $\underline{x}$ az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldása, akkor $A(\underline{x}+\underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$ miatt $\underline{x}+\underline{y}$ is megoldás. Tehát az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenletnek ha van is megoldása, az nem egyértelmű.

$\Leftarrow$: Tfh $|A| \neq 0$. Ekkor $\exists\ A^{-1}$, amivel balról szorozhatunk. Ezért $\left[A\underline{x} = \underline{b}\right] \Longleftrightarrow \left[\underline{x} = (A^{-1}A)\underline{x} = A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{b}\right]$, azaz $\underline{x}$ egyértelmű. $\square$

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Sor-, oszlop- és determinánsrang

Mit tanultunk ma?

- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége

Mit tanultunk ma?

- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége
- Rang meghatározása ESÁ-okkal

Mit tanultunk ma?

- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége
- Rang meghatározása ESÁ-okkal
- Mátrixműveletek hatása a rangra

Mit tanultunk ma?

- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége
- Rang meghatározása ESÁ-okkal
- Mátrixműveletek hatása a rangra
- Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenlettel ekvivalens

Mit tanultunk ma?

- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége
- Rang meghatározása ESÁ-okkal
- Mátrixműveletek hatása a rangra
- Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenlettel ekvivalens
- A megoldhatóság jellemezhető a $\underline{b}$ vektor és az A együtthatómátrix oszlopai generálta altér viszonyával

Mit tanultunk ma?

- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége
- Rang meghatározása ESÁ-okkal
- Mátrixműveletek hatása a rangra
- Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenlettel ekvivalens
- A megoldhatóság jellemezhető a $\underline{b}$ vektor és az A együtthatómátrix oszlopai generálta altér viszonyával
- $n \times n$ egyenletrendszer egyértelmű megoldhatósága az együtthatómátrix regularitásán múlik

Hogyan tovább?

Hogyan tovább?

Dec 11 8:00, IB027, IE007: 2. pótZH (Nem kell rá jelentkezni.)
23 pontszám feletti ZH nem rontható 24 alá.
Megtekintés: $\sim$ dec 13 (P), az utolsó gyakorlaton egyeztetve.

Hogyan tovább?

Dec 11 8:00, IB027, IE007: 2. pótZH (Nem kell rá jelentkezni.)
23 pontszám feletti ZH nem rontható 24 alá.
Megtekintés: $\sim$ dec 13 (P), az utolsó gyakorlaton egyeztetve.
Dec 17 8:00, QB08-09: ppZH & 1. vizsgaalkalom
Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.
Neptunban-jelentkezés, különeljárási díj van, IMSC pont nincs.

Hogyan tovább?

Dec 11 8:00, IB027, IE007: 2. pótZH (Nem kell rá jelentkezni.)
23 pontszám feletti ZH nem rontható 24 alá.
Megtekintés: $\sim$ dec 13 (P), az utolsó gyakorlaton egyeztetve.
Dec 17 8:00, QB08-09: ppZH & 1. vizsgaalkalom
Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.
Neptunban-jelentkezés, különeljárási díj van, IMSC pont nincs.
A szóbelik előtti napon konzultáció lesz, részletek a honlapjon.
A tételsor még a héten kikerül a honlapra.

Hogyan tovább?

Dec 11 8:00, IB027, IE007: 2. pótZH (Nem kell rá jelentkezni.)
23 pontszám feletti ZH nem rontható 24 alá.
Megtekintés: $\sim$ dec 13 (P), az utolsó gyakorlaton egyeztetve.
Dec 17 8:00, QB08-09: ppZH & 1. vizsgaalkalom
Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.
Neptunban-jelentkezés, különeljárási díj van, IMSC pont nincs.
A szóbelik előtti napon konzultáció lesz, részletek a honlapjon.
A tételsor még a héten kikerül a honlapra.
Szóbelik: Neptunban jelentkezni kell, létszámkorlát van.
Tételsorból egy tételt sorsolunk, 40 perc felkészülés után vizsga.
Megírt vázlat alapján felelet + kis kérdések.
(A ZH által le nem fedett részbe belekérdezünk.)

Hogyan tovább?

Dec 11 8:00, IB027, IE007: 2. pótZH (Nem kell rá jelentkezni.)
23 pontszám feletti ZH nem rontható 24 alá.
Megtekintés: ∼ dec 13 (P), az utolsó gyakorlaton egyeztetve.
Dec 17 8:00, QB08-09: ppZH & 1. vizsgaalkalom
Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.
Neptunban-jelentkezés, különeljárási díj van, IMSC pont nincs.
A szóbelik előtti napon konzultáció lesz, részletek a honlapjon.
A tételsor még a héten kikerül a honlapra.
Szóbelik: Neptunban jelentkezni kell, létszámkorlát van.
Tételsorból egy tételt sorsolunk, 40 perc felkészülés után vizsga.
Megírt vázlat alapján felelet + kis kérdések.
(A ZH által le nem fedett részbe belekérdezünk.)
Ismétlő/javító vizsga: alanyi jogon egyszer jár, felülírja a korábbi eredményt. A harmadik alkalomtól a vizsga már díjköteles.

Hogyan tovább?

Dec 11 8:00, IB027, IE007: 2. pótZH (Nem kell rá jelentkezni.)
23 pontszám feletti ZH nem rontható 24 alá.
Megtekintés: $\sim$ dec 13 (P), az utolsó gyakorlaton egyeztetve.
Dec 17 8:00, QB08-09: ppZH & 1. vizsgaalkalom
Az jöhet ppZH-ra, akinek csak egy ZH hiányzik az aláíráshoz.
Neptunban-jelentkezés, különeljárási díj van, IMSC pont nincs.
A szóbelik előtti napon konzultáció lesz, részletek a honlapjon.
A tételsor még a héten kikerül a honlapra.
Szóbelik: Neptunban jelentkezni kell, létszámkorlát van.
Tételsorból egy tételt sorsolunk, 40 perc felkészülés után vizsga.
Megírt vázlat alapján felelet + kis kérdések.
(A ZH által le nem fedett részbe belekérdezünk.)
Ismétlő/javító vizsga: alanyi jogon egyszer jár, felülírja a korábbi eredményt. A harmadik alkalomtól a vizsga már díjköteles.
Megfontolandó tanács: Igyekezzünk tervszerűen felkészülni és időben vizsgázni. Az utolsó vizsgaalkalmak nagyon zsúfoltak, a férőhely nem garantált.

Köszönöm a figyelmet!