A számítástudomány alapjai

Az $\mathbb{R}^n$ tér alaptulajdonságai

2024. november 5.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.

Példa:

$$\begin{pmatrix} e \\ \pi \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{, ill. } \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ utóbbi}$$

esetben az 1-es felülről az i-edik helyen áll.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

Konvenció: A jelölés során az oszlopvektorokat aláhúzással különböztetjük meg a skalároktól.

Megj: A vektorok tehát itt és most nem ,,irányított szakaszok", hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak. Az irányított szakaszok is tekinthetők vektornak, de a mi tárgyalásunkban egy ,,vektor" általában nem irányított szakasz.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e_i}$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Példa:

Ha $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, akkor $\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e_i}$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}$, $\underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem ,,igazi" művelet...)

Példa:

Ha $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda \underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e_i}$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem ,,igazi" művelet...)

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}, \underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.
Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem ,,igazi" művelet...)

(4) $\mathbb{R}^n$ **tér** alatt $\mathbb{R}^n$ elemire és a két fenti műveletre gondolunk.

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk. **Def:** $\underline{0}$, $\underline{e}_i$

(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.

(3) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket.

Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem ,,igazi" művelet...)

(4) $\mathbb{R}^n$ **tér** alatt $\mathbb{R}^n$ elemire és a két fenti műveletre gondolunk.

(5) $\mathbb{R}^2$ ill. $\mathbb{R}^3$ elemei természetes módon megfeleltethetők a sík, ill. a 3 dimenziós tér pontjainak. Ez segíthet abban, hogy valamiféle szemléletes képet kapjunk az n magasságú vektorokról tanultakról.

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)
(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)
(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)
(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)
(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)

(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)

(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)

(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)

(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Biz: Mivel mindkét művelet koordinátánként történik, elég az egyes azonosságokat koordinátánként ellenőrizni. Ezek viszont éppen a valós számokra (azaz a skalárokra) vonatkozó, jól ismert szabályok. $\square$

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)
(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)
(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)
(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)
(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)

(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)

(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)

(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)

(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Konvenció: $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $-\underline{v} := (-1) \cdot v$.

Megj: Vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető: $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$. Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)
(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)
(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)
(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)
(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Konvenció: $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $-\underline{v} := (-1) \cdot v$.

Megj: Vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető: $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$. Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

A vektorokkal történő számoláskor érvényes szabályok nagyon hasonlók a valós számok esetén megszokott szabályokhoz.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$, azaz az altér def.ható az $\mathbb{R}^n$ lineáris kombinációra zárt részhalmazaként.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Biz: $\Rightarrow$: $\lambda_i \underline{x}_i \in V$ $\forall i$ esetén, így a $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ összegük is V-beli.
$\Leftarrow$: Ha $\underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{x} + \underline{y}$ ill. $\lambda\underline{x}$ lineáris kombinációk. Mivel V zárt a lináris kombinációra, ezért $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$. Ez tetszőleges $\underline{x}, \underline{y}, \lambda$ esetén fennáll, tehát V zárt a műveletekre, vagyis altér. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Megj: Ha egy V-ről igazolni akarjuk, hogy altér, akkor elég a műveletzártságot ellenőrizni. Ha azonban V-ről tudjuk, hogy altér, akkor a **Megf** miatt az erősebb (lineáris kombinációra zárt) tulajdonságát is használhatjuk.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Példa:
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ az origón átmenő 2-meredekségű egyenes.
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$, ill. $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$ ahol $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ $\forall i$.
Konvenció: $\langle \emptyset \rangle := \{\underline{0}\}$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Biz: Zárt az összeadásra: $(\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k) + (\kappa_1 \underline{x}_1 + \ldots + \kappa_k \underline{x}_k) = (\lambda_1 + \kappa_1)\underline{x}_1 + \ldots + (\lambda_k + \kappa_k)\underline{x}_k \in V$. Skalárral szorzás: $\lambda \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k) = \lambda\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda\lambda_k \underline{x}_k \in V$. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
Biz: Műveletzártság: $\underline{x}, \underline{y} \in V_i \ \forall i, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V_i \ \forall i$. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. **Biz:** $\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$ ill. $\lambda\underline{0}=\underline{0}$, zárt a műveletekre. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Biz:** $\mathbb{R}^n$ zárt a műveletekre. $\square$

Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$.

Altér és lineáris kombináció

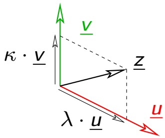
Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér altere (jel: $V \leq \mathbb{R}^n$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x}+\underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.
Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?
Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.
Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ lineáris kombinációja.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.
Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra$)$
Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.
Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által generált altér az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.
Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n \ \forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$. **Def:** $\mathbb{R}^n$ triviális alterei: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere, hisz minden $\mathbb{R}^n$-beli vektor előáll az egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$.
Ha $\mathbb{R}^2$-ben ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ nem párhuzamosak, akkor $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ generátorrendszer, hiszen bármely $\underline{z}$ vektor előállítható $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineáris kombinációjaként. (Ehhez $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egyenesére kell a ,,másik'' vektorral párhuzamosan vetíteni az előállítandó $\underline{z}$ vektort.)



Hasonlóan, ha $\mathbb{R}^3$-ban három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor generátorrendszert alkot.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ lin. ftn $\mathbb{R}^n$-ben, hisz ha $\lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$ akkor az i-edik koordináta 0 volta miatt $\lambda_i = 0$. Ez minden i-re igaz, tehát a fenti lineáris kombináció triviális.
$\mathbb{R}^2$-ben két vektor akkor lin.öf, ha párhuzamosak. Tehát ha nem párhuzamosak, akkor lin. ftn-ek. ($\underline{0}$ minden vektorral párhuzamos.)
$\mathbb{R}^3$-ban pedig az igaz, hogy ha három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor lineárisan független rendszert alkot.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Megj: A lin.ftn-ség (akárcsak a lin.öf tulajdonság) vektorok egy halmazára és nem az egyes vektorokra vonatkozik. Hasonló igaz a generátorrendszerre. Az, hogy egy konrét $\underline{v}$ vektor benne van egy lin.ftn (vagy lin.öf vagy generátor-) rendszerben lényegében semmi információt nem ad $\underline{v}$-ről.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő: $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.
Biz: A fenti állítások tagadásainak ekvivalenciáját igazoljuk.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\Longleftrightarrow$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.
Biz: A fenti állítások tagadásainak ekvivalenciáját igazoljuk.
1. Tfh $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ **nem** lineárisan független, azaz
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$ és $\lambda_i \neq 0$. Ekkor $\underline{x}_i$ előállítható a többiből:
$\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot \left(\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k \right)$.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:

$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$

Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Biz: A fenti állítások tagadásainak ekvivalenciáját igazoljuk.

1. Tfh $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ **nem** lineárisan független, azaz $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$ és $\lambda_i \neq 0$. Ekkor $\underline{x}_i$ előállítható a többiből:

$\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot \left(\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k \right)$.

2. Most tfh valamelyik x_i előáll a többi lineáris kombinációjaként:

$\underline{x}_i = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. Ekkor $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ nem lineárisan független, hiszen a nullvektor megkapható nemtriviális lineáris kombinációként:

$\underline{0} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{x}_i + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. $\square$

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\Longleftrightarrow$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.
Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\Longleftrightarrow$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő: $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

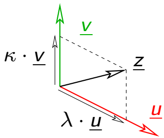
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.

(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.

(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t.



Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő: $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.

Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.

(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.

(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.
Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.
(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t.
(4) Ha $\langle G \rangle = V$ és $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\langle G' \rangle = V$, azaz generátorrendszert (V-n belül) hízlalva generátorrendszer marad.

Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.
Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő:
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor lineárisan összefüggők.
Lemma: $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ lineárisan független vektorrendszer $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.
Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.
(2) Két vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.
(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t.
(4) Ha $\langle G \rangle = V$ és $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\langle G' \rangle = V$, azaz generátorrendszert (V-n belül) hízlalva generátorrendszer marad.
(5) $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $F' \subseteq F$, akkor F' is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Megj: A fenti állítás tkp azt mondja ki, hogy egy V altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkossanak, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$

Megj: A fenti állítás tkp azt mondja ki, hogy egy V altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkossanak, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.

Biz: $\Rightarrow$: Ekkor $\langle G \rangle = V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{v} \in V = \langle G \rangle$.

$\Leftarrow$: Tetsz. $\underline{u} \in V$ elemről azt kell megmutatni, hogy $\underline{u} \in \langle G \rangle$.

Mivel $\underline{v} \in \langle G \rangle$, feltehető, hogy $\underline{v} = \sum_{\underline{g} \in G} \lambda_{\underline{g}} \underline{g}$.

Tudjuk, hogy $\underline{u} \in V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{u} = \lambda \underline{v} + \sum_{\underline{g} \in G} \mu_{\underline{g}} \underline{g}$.

Ebbe behelyettesítve a fenti kifejezést $\underline{u} = \sum_{\underline{g} \in G} (\mu_{\underline{g}} + \lambda \cdot \lambda_{\underline{g}}) \underline{g}$ adódik, azaz $\underline{u} \in \langle G \rangle$. Ez bmely $\underline{u} \in V$-re igaz, így $\langle G \rangle = V$. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor ($F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.) $\iff$ $(\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Megj: A lemma szerint ftn halmaz hízlalása csakis olyan vektorral lehetséges, ami nem áll elő a ftn rendszer elemei lin.komb-jaként. A $\Leftarrow$ irányt az ,,újonnan érkező vektor lemmájának" is nevezik.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Megj: A lemma szerint ftn halmaz hízlalása csakis olyan vektorral lehetséges, ami nem áll elő a ftn rendszer elemei lin.komb-jaként. A $\Leftarrow$ irányt az ,,újonnan érkező vektor lemmájának" is nevezik.

Biz: $\Rightarrow$: Ha $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn., akkor $\underline{f}$ nem áll elő F-beliek lin.komb.-jaként, azaz $\underline{f} \notin \langle F\rangle$.

$\Leftarrow$: Thf $\underline{f} \notin \langle F\rangle$ és $\lambda\underline{f} + \lambda_1\underline{f}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{f}_k = \underline{0}$. Azt kell belátnunk, hogy $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Ha $\lambda = 0$, akkor a BO az $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k$ vektorok lin.kombinációja, így F lin.ftnsége miatt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ Tehát $\underline{0}$ csak triviális lineáris kombinációként áll elő, vagyis $F \cup \{\underline{f}\}$ csakugyan lin.ftn.

Ha pedig $\lambda \neq 0$, akkor $\underline{f}$ kifejezhető az F-beliekkel:
$\underline{f} = \frac{-\lambda_1}{\lambda}\underline{f}_1 + \ldots + \frac{-\lambda_k}{\lambda}\underline{f}_k$, azaz $f \in \langle F\rangle$. Ez ellentmond az $\underline{f} \notin \langle F\rangle$ feltevésnek. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

Megj: A kicserélési lemma szerint bárhogy is törlünk a V altér egy ftn rendszeréből egy vektort, az pótolható V generátorrendszerének egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lin.ftn marad.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

Megj: A kicserélési lemma szerint bárhogy is törlünk a V altér egy ftn rendszeréből egy vektort, az pótolható V generátorrendszerének egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lin.ftn marad.

Biz: Legyen $F' := F \setminus \{\underline{f}\}$. Indirekt bizonyítunk.

Tfh $F' \cup \{\underline{g}\}$ egyetlen $\underline{g} \in G$-re sem lin. ftn. Ekkor az előző lemma miatt $\underline{g} \in \langle F'\rangle$ teljesül minden $\underline{g} \in G$-re. Ezért $G \subseteq \langle F'\rangle$, ahonnan $\langle G\rangle \subseteq \langle F'\rangle$ következik. Ebből pedig $\underline{f} \in V = \langle G\rangle \subseteq \langle F'\rangle$, azaz $\underline{f} \in \langle F'\rangle$ adódik. A fenti lemma miatt $\{f\} \cup F' = F$ nem lin. ftn, ami ellentmondás.

Az indirekt feltevés hamis, így $\exists\ \underline{g} \in G$, amire $F' \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G \rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G \rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F \rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G \rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Megj: Magyarul: altérben egy ftn. rendszer mérete nem lehet nagyobb egy generátorrendszer méreténél.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Megj: Magyarul: altérben egy ftn. rendszer mérete nem lehet nagyobb egy generátorrendszerméreténél.

Biz: Legyen $F_0 := F$. Ha $F_0 \subseteq G$, akkor $|F_0| \leq |G|$. Ha $F_0 \not\subseteq G$, akkor $F_0 \setminus G \neq \emptyset$, legyen mondjuk $\underline{f} \in F_0 \setminus G$. A kicserélési lemma miatt van olyan $\underline{g} \in G$, amire $F_1 := F_0 \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. Ezzel az F_1-gyel ugyanezt folytatva kapjuk az F_2, $F_3, \ldots$, lin.ftn rendszereket. Előbb-utóbb olyan F_i-hez jutunk, amivel ez már nem folytatható, mert $F_i \subseteq G$. Ekkor $|F_0| = |F_1| = \ldots = |F_i| \leq |G|$, győztünk. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\, \underline{f} \in F\ \exists\, \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Biz: Láttuk, hogy $G = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq |G| = n$. $\square$

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Állítás: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\underline{f} \in \langle F\rangle$. Ekkor $\underline{f}$ egyértelműen áll elő F-beli vektorok lin.komb.-jaként.

Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Állítás: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\underline{f} \in \langle F\rangle$. Ekkor $\underline{f}$ egyértelműen áll elő F-beli vektorok lin.komb.-jaként.

Biz: Mivel $f \in \langle F\rangle$, ezért $\underline{f}$ előáll az F-beliek lin.komb.-jaként. Tfh $\underline{f} = \lambda_1\underline{f}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{f}_k = \mu_1\underline{f}_1 + \ldots + \mu_k\underline{f}_k$ két előállítás. Ekkor $\underline{0} = \underline{f} - \underline{f} = (\lambda_1 - \mu_1)\underline{f}_1 + \ldots + (\lambda_k - \mu_k)\underline{f}_k$.
Mivel F lin.ftn, a JO-on álló lineáris kombináció triviális, azaz $\lambda_i = \mu_i\ \forall i$. Így a két fenti előállítás megegyezik, vagyis f csak egyféleképp áll elő az F-beliek lin.komb-jaként. □

Generált vektorok számítása

Hogyan lehet eldönteni egy $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorról, hogy benne van-e a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérben?

Generált vektorok számítása

Hogyan lehet eldönteni egy $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorról, hogy benne van-e a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérben?
Azt kell megállapítani, hogy $\underline{u}$ előáll-e $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k$ alakban alkalmas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalárokkal.

Generált vektorok számítása

Hogyan lehet eldönteni egy $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorról, hogy benne van-e a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérben?
Azt kell megállapítani, hogy $\underline{u}$ előáll-e $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k$ alakban alkalmas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalárokkal.
A válasz egy lineáris egyenletrendszer megoldásából adódik.

Generált vektorok számítása

Hogyan lehet eldönteni egy $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorról, hogy benne van-e a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérben?
Azt kell megállapítani, hogy $\underline{u}$ előáll-e $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k$ alakban alkalmas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalárokkal.
A válasz egy lineáris egyenletrendszer megoldásából adódik.
Példa: Benne van-e az $\underline{u}$ vektor $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ altérben, ahol
$\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Generált vektorok számítása

Példa: Benne van-e az $\underline{u}$ vektor $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ altérben, ahol $\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Generált vektorok számítása

Példa: Benne van-e az $\underline{u}$ vektor $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ altérben, ahol $\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ skalárok, amire $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3$ teljesül.

Generált vektorok számítása

Példa: Benne van-e az $\underline{u}$ vektor $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ altérben, ahol $\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ skalárok, amire $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3$ teljesül.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 6 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 6 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

Generált vektorok számítása

Példa: Benne van-e az $\underline{u}$ vektor $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ altérben, ahol
$\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ skalárok, amire $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3$ teljesül.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 6 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 6 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

A megoldáshoz a kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -4 \\ \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

Generált vektorok számítása

Példa: Benne van-e az $\underline{u}$ vektor $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ altérben, ahol
$\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ skalárok, amire $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3$ teljesül.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 6 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 6 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

A megoldáshoz a kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -4 \\ \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy $\underline{u} = -4\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 - \underline{v}_3$, tehát $\underline{u} \in V$, vagyis az $\underline{u}$ vektort generálják a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok.

Generált vektorok számítása

Példa: Benne van-e az $\underline{u}$ vektor $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ altérben, ahol $\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ skalárok, amire $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3$ teljesül.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 6 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 6 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

A megoldáshoz a kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -4 \\ \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy $\underline{u} = -4\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 - \underline{v}_3$, tehát $\underline{u} \in V$, vagyis az $\underline{u}$ vektort generálják a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok.

Ha nem lett volna megoldása a fenti egyenletrendszernek, akkor $\underline{u}$ nem lett volna benne a generált altérben.

Generált altér megadása

A következő célunk az, hogy egy generátorrendszer segítségével megadott V altér vektorait jellemezzük. Ehhez felhasználjuk az imént látott módszert, aminek a segítségével egy konkrét $\underline{u}$ vektorról eldöntöttük, hogy V-hez tartozik-e. Most nem egy konkrét vektort, hanem egy „általános” $\underline{x}$ vektorra fogjuk megvizsgálni, mi is az altérhez tartozás feltétele. Láttuk, hogy egy konkrét $\underline{u}$ vektor akkor volt V-beli, ha egy lineáris egyenletrendszernek volt megoldása. Ugyanezt tesszük most is, azzal a különbséggel, hogy nem egy konkrét lineáris egyenletrendszert oldunk meg, hanem egy olyat, aminek a jobb oldalán, a konstansok helyén paraméterek állnak.

Generált altér megadása

A következő célunk az, hogy egy generátorrendszer segítségével megadott V altér vektorait jellemezzük. Ehhez felhasználjuk az imént látott módszert, aminek a segítségével egy konkrét $\underline{u}$ vektorról eldöntöttük, hogy V-hez tartozik-e. Most nem egy konkrét vektort, hanem egy „általános" $\underline{x}$ vektorra fogjuk megvizsgálni, mi is az altérhez tartozás feltétele. Láttuk, hogy egy konkrét $\underline{u}$ vektor akkor volt V-beli, ha egy lineáris egyenletrendszernek volt megoldása. Ugyanezt tesszük most is, azzal a különbséggel, hogy nem egy konkrét lineáris egyenletrendszert oldunk meg, hanem egy olyat, aminek a jobb oldalán, a konstansok helyén paraméterek állnak.

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \end{array}\right)$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1\underline{u} + \lambda_2\underline{v} + \lambda_3\underline{w} + \lambda_4\underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \end{array}\right) \boxed{1} \leftrightarrow \boxed{4}: \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \end{array}\right)$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \end{array}\right) \boxed{1} \leftrightarrow \boxed{4}: \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right)$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \end{array}\right) \boxed{1} \leftrightarrow \boxed{4}: \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right) \boxed{2} \leftrightarrow \boxed{3}:$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right)$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \end{array}\right) \boxed{1} \leftrightarrow \boxed{4}: \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right) \boxed{2} \leftrightarrow \boxed{3}:$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right)$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right)$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & x_4 - x_3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x_1 + 5x_3 - 3x_4 \end{array}\right)$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & x_4 - x_3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x_1 + 5x_3 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2+2x_3+x_4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4}{3} \end{array}\right)$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 3 & 1 & x_4 - x_3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x_1 + 5x_3 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2+2x_3+x_4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3x_1-x_2+13x_3-10x_4}{3} \end{array}\right)$$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 3 & 1 & x_4 - x_3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x_1 + 5x_3 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 3 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2+2x_3+x_4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3x_1-x_2+13x_3-10x_4}{3} \end{array}\right)$$

Ezért $\underline{x} \in V \iff$ a fenti egy.rsz. megoldható $\iff$ a LA-ban $\nexists$ tilos sor.
A konkrét esetben $\underline{x} \in V \iff 3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4 = 0.$ $\square$

Generált altér megadása

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1 \underline{u} + \lambda_2 \underline{v} + \lambda_3 \underline{w} + \lambda_4 \underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 3 & 1 & x_4 - x_3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x_1 + 5x_3 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 3 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2+2x_3+x_4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3x_1-x_2+13x_3-10x_4}{3} \end{array}\right)$$

Ezért $\underline{x} \in V \iff$ a fenti egy.rsz. megoldható $\iff$ a LA-ban $\nexists$ tilos sor.

A konkrét esetben $\underline{x} \in V \iff 3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4 = 0.$ $\square$

Köv: Hasonló gondolatmenet mutatja, hogy minden V altérhez tartozik egy (homogén) lineáris egyenletrendszer, ami jellemzi V vektorait.

Lineáris függetlenség eldöntése

Hogyan döntjük el $\mathbb{R}^n$-beli vektorok egy $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ halmazáról, hogy lineárisan függetlenek-e vagy sem?

Lineáris függetlenség eldöntése

Hogyan döntjük el $\mathbb{R}^n$-beli vektorok egy $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ halmazáról, hogy lineárisan függetlenek-e vagy sem? A korábban igazolt lemma szerint azt kell eldönteni, hogy előáll-e valamelyik $\underline{v}_i$ vektor a többi lineáris kombinációjaként, azaz (például $i = k$ esetén) vannak-e olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ skalárok, amikre $\underline{v}_k = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \underline{v}_{k-1}$.

Lineáris függetlenség eldöntése

Hogyan döntjük el $\mathbb{R}^n$-beli vektorok egy $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ halmazáról, hogy lineárisan függetlenek-e vagy sem? A korábban igazolt lemma szerint azt kell eldönteni, hogy előáll-e valamelyik $\underline{v}_i$ vektor a többi lineáris kombinációjaként, azaz (például $i = k$ esetén) vannak-e olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ skalárok, amikre $\underline{v}_k = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \underline{v}_{k-1}$. Ezt egy lineáris egyenletrendszer megoldásával lehet eldönteni. (Valójában elég a megoldhatóság eldöntése.) Ha ezt a stratégiát követjük, akkor k db lineáris egyenletrendszerrel kell foglalkozni.

Lineáris függetlenség eldöntése

Hogyan döntjük el $\mathbb{R}^n$-beli vektorok egy $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ halmazáról, hogy lineárisan függetlenek-e vagy sem? A korábban igazolt lemma szerint azt kell eldönteni, hogy előáll-e valamelyik $\underline{v}_i$ vektor a többi lineáris kombinációjaként, azaz (például $i = k$ esetén) vannak-e olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ skalárok, amikre $\underline{v}_k = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \underline{v}_{k-1}$. Ezt egy lineáris egyenletrendszer megoldásával lehet eldönteni. (Valójában elég a megoldhatóság eldöntése.) Ha ezt a stratégiát követjük, akkor k db lineáris egyenletrendszerrel kell foglalkozni. E helyett célszerűbb a lineáris függetlenség eredeti definíciójával dolgozni: azt kell eldönteni, hogy $\underline{0}$ előáll-e a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok nemtriviális lineáris kombinációjaként. Így csak egyetlen egyenletrendszerrel kell foglalkozni, és azt eldönteni, hogy van-e olyan megoldása, amiben nem minden ismeretlen értéke 0.

Lineáris függetlenség eldöntése

Hogyan döntjük el $\mathbb{R}^n$-beli vektorok egy $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ halmazáról, hogy lineárisan függetlenek-e vagy sem? A korábban igazolt lemma szerint azt kell eldönteni, hogy előáll-e valamelyik $\underline{v}_i$ vektor a többi lineáris kombinációjaként, azaz (például $i = k$ esetén) vannak-e olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ skalárok, amikre $\underline{v}_k = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \underline{v}_{k-1}$. Ezt egy lineáris egyenletrendszer megoldásával lehet eldönteni. (Valójában elég a megoldhatóság eldöntése.) Ha ezt a stratégiát követjük, akkor k db lineáris egyenletrendszerrel kell foglalkozni. E helyett célszerűbb a lineáris függetlenség eredeti definíciójával dolgozni: azt kell eldönteni, hogy $\underline{0}$ előáll-e a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok nemtriviális lineáris kombinációjaként. Így csak egyetlen egyenletrendszerrel kell foglalkozni, és azt eldönteni, hogy van-e olyan megoldása, amiben nem minden ismeretlen értéke 0.

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, μ, κ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda \underline{u} + \mu \underline{v} + \kappa \underline{w} = \underline{0}$.

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, μ, κ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} = \underline{0}$.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$3\lambda + 2\mu + 0\kappa = 0$

$2\lambda + 2\mu + 3\kappa = 0$

$0\lambda + 2\mu + 9\kappa = 0$

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, μ, κ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} = \underline{0}$.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$3\lambda + 2\mu + 0\kappa = 0$

$2\lambda + 2\mu + 3\kappa = 0$ Felírjuk a kib. egyhómx-ot, és fürgén nekilátunk:

$0\lambda + 2\mu + 9\kappa = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \boxed{1}\text{: } \boxed{1}\text{-}\boxed{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \boxed{2}\text{: } \boxed{2}\text{-}\boxed{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \lambda = 0 \\ \kappa = 0 \\ \mu = 0 \end{array}$$

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, μ, κ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} = \underline{0}$.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$3\lambda + 2\mu + 0\kappa = 0$

$2\lambda + 2\mu + 3\kappa = 0$ Felírjuk a kib. egyhómx-ot, és fürgén nekilátunk:

$0\lambda + 2\mu + 9\kappa = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \ \boxed{1}\text{:}\ \boxed{1}\text{-}\boxed{2} \ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \ \boxed{2}\text{:}\ \boxed{2}\text{-}\boxed{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \lambda = 0 \\ \kappa = 0 \\ \mu = 0 \end{array}$$

Azt kaptuk, hogy kizárólag a $\lambda = \kappa = \mu = 0$ a megoldás, tehát az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja ad $\underline{0}$-t. Ezért a kérdezett vektorok lineárisan független halmazt alkotnak.

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, μ, κ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} = \underline{0}$.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$3\lambda + 2\mu + 0\kappa = 0$

$2\lambda + 2\mu + 3\kappa = 0$ Felírjuk a kib. egyhómx-ot, és fürgén nekilátunk:

$0\lambda + 2\mu + 9\kappa = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \boxed{1}\text{: } \boxed{1}\text{-}\boxed{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \boxed{2}\text{: } \boxed{2}\text{-}\boxed{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \kappa = 0 \\ \mu = 0 \end{array}$$

Azt kaptuk, hogy kizárólag a $\lambda = \kappa = \mu = 0$ a megoldás, tehát az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja ad $\underline{0}$-t.
Ezért a kérdezett vektorok lineárisan független halmazt alkotnak.
Nézzünk meg egy másik példát is!

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Ismét azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, μ, κ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda \underline{u} + \mu \underline{v} + \kappa \underline{w} = \underline{0}$.

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Ismét azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, μ, κ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda \underline{u} + \mu \underline{v} + \kappa \underline{w} = \underline{0}$.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$3\lambda + 2\mu + 0\kappa = 0$

$1\lambda + 2\mu + 4\kappa = 0$

$0\mu + 3\mu + 9\kappa = 0$

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Ismét azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, μ, κ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} = \underline{0}$. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$3\lambda + 2\mu + 0\kappa = 0$

$1\lambda + 2\mu + 4\kappa = 0$ Felírjuk a kib. egyhómx-ot, és ismét nekilátunk:

$0\mu + 3\mu + 9\kappa = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\boxed{1}\leftrightarrow\boxed{2}}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \kappa \in \mathbb{R} \text{ tetsz.} \\ \lambda = 2\kappa \\ \mu = -3\kappa \end{array}$$

Lineáris függetlenség eldöntése

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Ismét azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, μ, κ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} = \underline{0}$.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg:

$3\lambda + 2\mu + 0\kappa = 0$

$1\lambda + 2\mu + 4\kappa = 0$ Felírjuk a kib. egyhómx-ot, és ismét nekilátunk:

$0\mu + 3\mu + 9\kappa = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \overset{\boxed{1}\leftrightarrow\boxed{2}}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} \kappa \in \mathbb{R} \text{ tetsz.} \\ \lambda = 2\kappa \\ \mu = -3\kappa \end{array}$$

Azt kaptuk, hogy a κ szabad paraméter, így például a $\kappa = 1$, $\lambda = 2$, $\mu = -3$ választással $2\underline{u} - 3\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$ adódik.

Az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok nemtriviális lineáris kombinációja előállítja a $\underline{0}$-t, ezért a kérdezett vektorok nem lineárisan függetlenek.

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.
- Generált altérhez tartozás eldöntése.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.
- Generált altérhez tartozás eldöntése.
- Generált altérhez tartozás jellemzése egyenletrendszerrel.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.
- Generált altérhez tartozás eldöntése.
- Generált altérhez tartozás jellemzése egyenletrendszerrel.
- Lineáris függetlenség eldöntése.

Mit tanultunk ma?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.
- Generált altérhez tartozás eldöntése.
- Generált altérhez tartozás jellemzése egyenletrendszerrel.
- Lineáris függetlenség eldöntése.

Köszönöm a figyelmet!