

A számítástudomány alapjai

A gráfelmélet alapjai

2024. szeptember 3.

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Előadások: heti 2 óra elmélet + 1 óra elmélet/típusfeladatok

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Előadások: heti 2 óra elmélet + 1 óra elmélet/típusfeladatok

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Tudnivalók: www.cs.bme.hu/sza

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Előadások: heti 2 óra elmélet + 1 óra elmélet/típusfeladatok

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Tudnivalók: www.cs.bme.hu/sza

Segédanyagok: Előadások anyaga (pdf, előadásvideó)

Közös gyakorlat-feladatsor tudnivalók része

Katona-Recski-Szabó (nyomtatott/elektronikus) jegyzet

NESZ (régóta saját digitális jegyzete, rég volt karbantartva)

Szeszlér BSz1 jegyzet (jól átgondolt, letölthető linalg jegyzet)

Wiener BSz1 példatár (letölthető linalg példatár)

letölthető gráfelmélet példatár

Alapvető tudnivalók

Miről lesz szó?

1. Gráfelmélet, gráfalgoritmusok
2. Lineáris algebra
(vektorok, mátrixok, determinánsok, egyenletrendszerek)

Cél: matematikai eszközök és szemléletmód megismerése.
(Definíció-tétel-bizonyítás alapú „építkezés”)

Előadások: heti 2 óra elmélet + 1 óra elmélet/típusfeladatok

Gyakorlatok: heti 2 óra, kis csoportos feladatmegoldás

Tudnivalók: www.cs.bme.hu/sza

Segédanyagok: Előadások anyaga (pdf, előadásvideó)

Közös gyakorlat-feladatsor tudnivalók része

Katona-Recski-Szabó (nyomtatott/elektronikus) jegyzet

NESZ (régóta saját digitális jegyzete, rég volt karbantartva)

Szeszlér BSz1 jegyzet (jól átgondolt, letölthető linalg jegyzet)

Wiener BSz1 példatár (letölthető linalg példatár)

letölthető gráfelmélet példatár

Extrák: Érdekes kiegészítő információk érdeklődőknek. Nem kérjük számon.

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(X.31,XI.18,XII.17), 2.ZH(XI.28,XII.11,17)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

PpZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 4 gyak hiányzás \Rightarrow Aláírás.

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(X.31,XI.18,XII.17), 2.ZH(XI.28,XII.11,17)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

PpZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 4 gyak hiányzás \Rightarrow Alíírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(X.31,XI.18,XII.17), 2.ZH(XI.28,XII.11,17)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

PpZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 4 gyak hiányzás \Rightarrow Aláírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.

Vizsgához neptun jelentkezés, tételsorról random tétel, 30 perc felkészülés, kis kérdések (ZH-n nem számonkért anyagból is!).

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(X.31,XI.18,XII.17), 2.ZH(XI.28,XII.11,17)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

PpZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 4 gyak hiányzás \Rightarrow Aláírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.

Vizsgához neptun jelentkezés, tételsorról random tétel, 30 perc felkészülés, kis kérdések (ZH-n nem számonkért anyagból is!).

Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese **szóbeli pontszám (szp)**. (0 és 60 közé esik.)

$szp < 24 \Rightarrow$ elégtelen. **Végső pontszám vp** = hp + szp.

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(X.31,XI.18,XII.17), 2.ZH(XI.28,XII.11,17)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

PpZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 4 gyak hiányzás \Rightarrow Aláírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.

Vizsgához neptun jelentkezés, tételsorról random tétel, 30 perc

felkészülés, kis kérdések (ZH-n nem számonkért anyagból is!).

Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese **szóbeli pontszám (szp)**. (0 és 60 közé esik.)

$szp < 24 \Rightarrow$ elégtelen. **Végső pontszám vp** = hp + szp.

Konverzió:

\geq	0	40	55	70	85
vp	1	2	3	4	5
$<$	40	55	70	85	101

Követelmények

Számonkérések: 1.ZH(X.31,XI.18,XII.17), 2.ZH(XI.28,XII.11,17)

Minden ZH 6x10 pont, 50 pont felett IMSC.

PpZH: neptun, különelj. díj, ≤ 1 ZH pótolható, nincs IMSC pont.

Ha $ZH_1 \geq 24$ & $ZH_2 \geq 24$ & legfeljebb 4 gyak hiányzás \Rightarrow Aláírás.

Hozott pontszám (hp):

50 alatti ZH pontszámok összegének 40%-a. (19 és 40 közé esik.)

Aláírás $\checkmark \Rightarrow$ szóbeli vizsga.

Vizsgához neptun jelentkezés, tételsorról random tétel, 30 perc

felkészülés, kis kérdések (ZH-n nem számonkért anyagból is!).

Szóbelin kapható 60 pont, az 50 feletti rész IMSC pont, az 50 alatti rész 1,2-szerese **szóbeli pontszám (szp)**. (0 és 60 közé esik.)

$szp < 24 \Rightarrow$ elégtelen. **Végső pontszám vp** = hp + szp.

Konverzió:

\geq	0	40	55	70	85
vp	1	2	3	4	5
$<$	40	55	70	85	101

Ismétlő/javító vizsga: a szabad vizsgaidőpontok függvényében.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő héten (szept 10-dikén és 11-dikén) az előadáson és az I2 gyakorlaton helyettesítés lesz.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő héten (szept 10-dikén és 11-dikén) az előadáson és az I2 gyakorlaton helyettesítés lesz.
- ▶ A harmadik héten az előadás sportnap miatt elmarad.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő héten (szept 10-dikén és 11-dikén) az előadáson és az 12 gyakorlaton helyettesítés lesz.
- ▶ A harmadik héten az előadás sportnap miatt elmarad.
- ▶ Az első két héten az első előadást gyakoroljuk a gyakorlaton.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő héten (szept 10-dikén és 11-dikén) az előadáson és az I2 gyakorlaton helyettesítés lesz.
- ▶ A harmadik héten az előadás sportnap miatt elmarad.
- ▶ Az első két héten az első előadást gyakoroljuk a gyakorlaton.
- ▶ Az ötödik heti előadás szintén elmarad, ezen a héten is a negyedik előadás anyagát fogjuk gyakorolni.

Szolgálati közlemények

- ▶ A jövő héten (szept 10-dikén és 11-dikén) az előadáson és az I2 gyakorlaton helyettesítés lesz.
- ▶ A harmadik héten az előadás sportnap miatt elmarad.
- ▶ Az első két héten az első előadást gyakoroljuk a gyakorlaton.
- ▶ Az ötödik heti előadás szintén elmarad, ezen a héten is a negyedik előadás anyagát fogjuk gyakorolni.
- ▶ A nyolcadik héten a gyakorlat marad el. Ezt a lemaradást be kell hozni majd a ZH-ig.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,
ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,
ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Megj: Épeszű ember nem így tekint a gráfokra.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf,

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Mi a gráf?

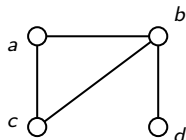
Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.



Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

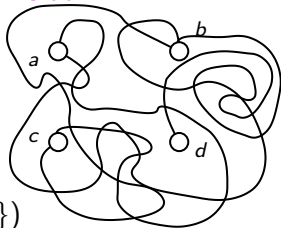
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.



Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

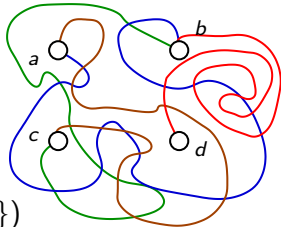
V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.

Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.



Mi a gráf?

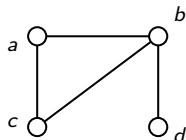
Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.



Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Mi a gráf?

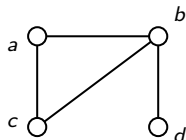
Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.



Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Példa: A **facebook-gráf** csúcsai a meta-felhasználók, élei pedig az facebook-ismeretségeknek felelnek meg.

Mi a gráf?

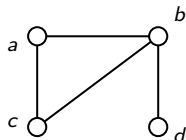
Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),

E pedig G éleinek halmaza.



Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

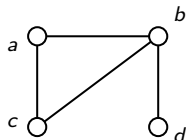
Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf, **Példa:**

ha $V \neq \emptyset$ és $E \subseteq \binom{V}{2}$,

ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.

V a G csúcsainak (vagy (szög)pontjainak),
 E pedig G éleinek halmaza.



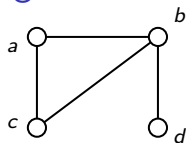
Példa:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$

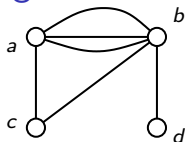
Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V -nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy u -t és v -t összekötő görbe felel meg.

Terminológia & konvenciók: Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ a G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát jelöli, azaz $G = (V(G), E(G))$. Az $e = \{u, v\}$ élt röviden uv -vel jelöljük. Ekkor e az u és v csúcsokat **köti össze**. Továbbá u és v az e **végpontjai**, amelyek az e élre **illeszkednek**, és e mentén **szomszédosak**.

Multigráfok és irányított gráfok

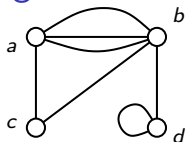


Multigráfok és irányított gráfok



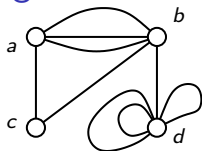
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**

Multigráfok és irányított gráfok



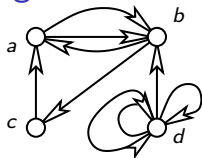
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**,
hurokélei

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

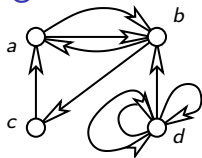
Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Multigráfok és irányított gráfok

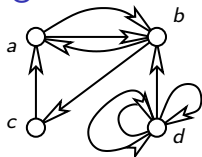


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ **véges gráf**, ha V és E is véges halmazok.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

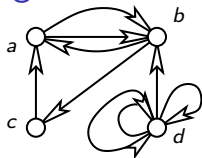
Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ **véges gráf**, ha V és E is véges halmazok.

Megj: Egyik halmaz végességéből sem következik a másiké.

Megj: A végtelen gráfoknak rendkívül különös tulajdonságai lehetnek. Ezen a kurzuson csak véges gráfokkal foglalkozunk.

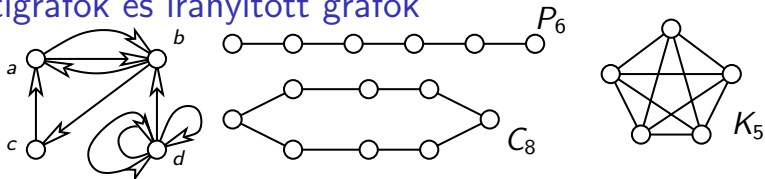
Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Multigráfok és irányított gráfok

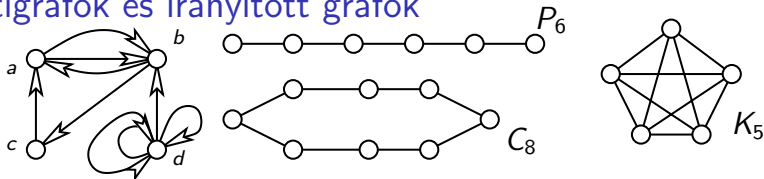


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajulóak.)

Multigráfok és irányított gráfok

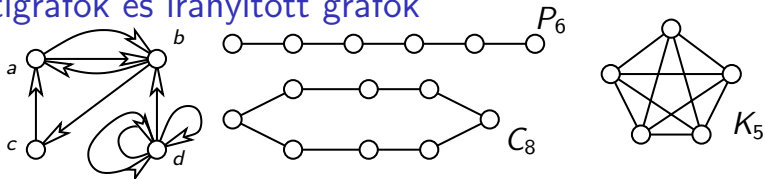


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajulóak.) **Megf:** $K_1 =$

Multigráfok és irányított gráfok

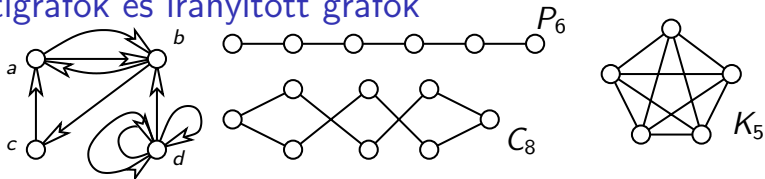


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajulóak.) **Megf:** $K_1 = P_1$

Multigráfok és irányított gráfok

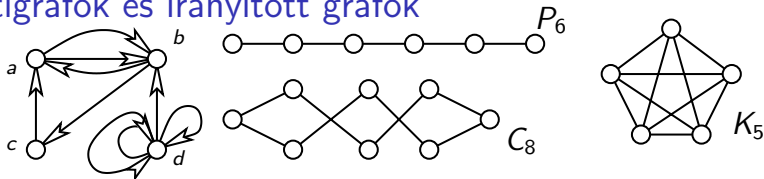


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 =$

Multigráfok és irányított gráfok

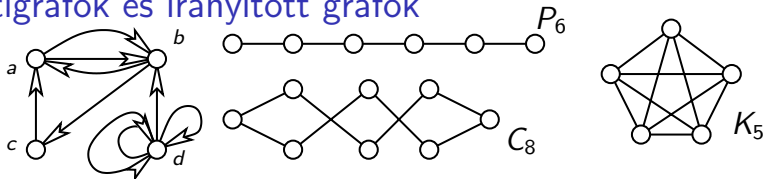


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajulóak.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$

Multigráfok és irányított gráfok

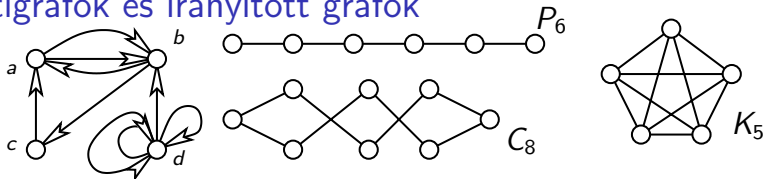


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 =$

Multigráfok és irányított gráfok

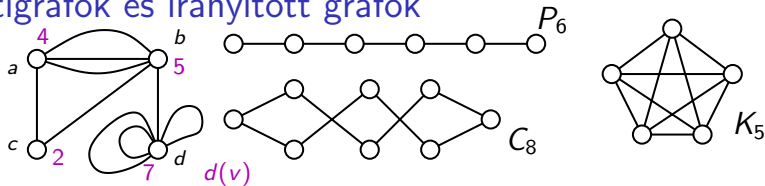


Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Multigráfok és irányított gráfok



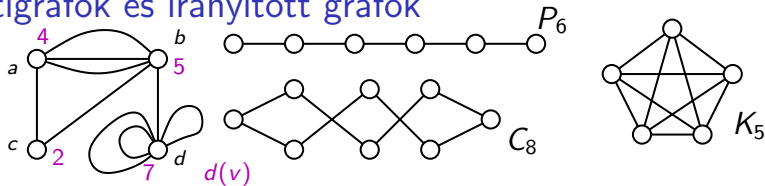
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

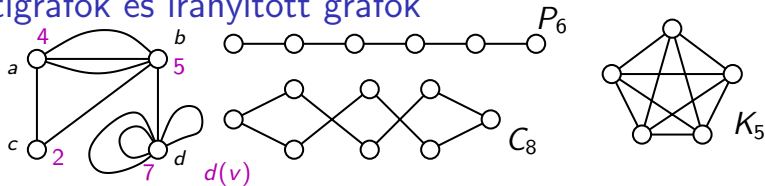
Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

Példa: A facebook-gráfban $d(v)$ a v ismerőseinek számát jelenti.

Multigráfok és irányított gráfok



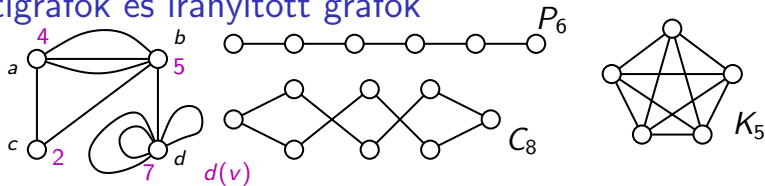
Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

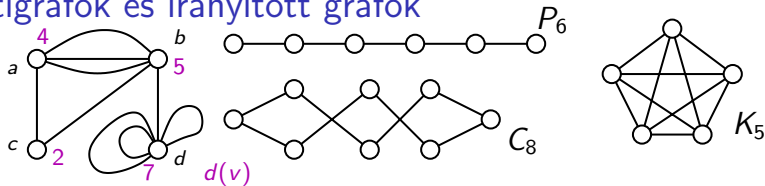
Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1, C_1, C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

(Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v **ki-** ill. **befokát** jelöli.)

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

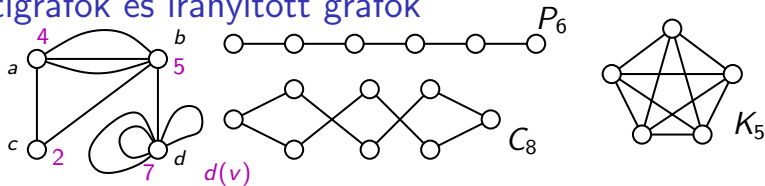
Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

(Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v **ki-** ill. **befokát** jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$.
 G **reguláris**, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G)$,
 G pedig **k -reguláris**, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Multigráfok és irányított gráfok



Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: Az **n -pontú út**, **n -pontú kör**, ill. **n -pontú teljes gráf** jele rendre P_n , C_n ill. K_n . (P_1 , C_1 , C_2 elfajuló.) **Megf:** $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v -re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$, a hurokél kétszer számít.

(Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v **ki-** ill. **befokát** jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$. G **reguláris**, ha minden csúcsának foka ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G)$, G pedig **k -reguláris**, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

Megf: Minden kör 2-reguláris, a K_n pedig $(n - 1)$ -reguláris.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

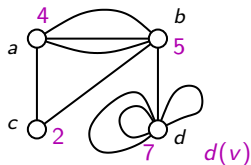
A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Példa:



A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

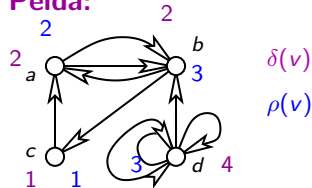
Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

Példa:



A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámlálva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámolva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. □

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámlálva G minden irányított élét pontosan egyszer számoljuk meg. Ezért a kifokok összege az élszám. A belépő éleket leszámolva hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. □

Megj: Úgy is bizonyíthatnánk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G -be az éleket. 0-élű (üres)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

A KFL bizonyítása: Készítsük el a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \quad \square$$

A handshaking lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges, nem feltétlenül egyszerű gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$.

A KFL bizonyítása: Készítsük el a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \quad \square$$

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G -be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszámösszeget is.

Komplementer és izomorfia

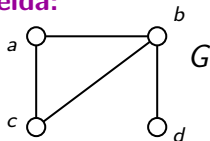
Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és \overline{G} csúcsai megegyeznek, és két csúcspontosan akkor szomszédos \overline{G} -ben, ha nem szomszédosak G -ben.

Példa:

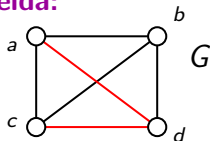


Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és \overline{G} csúcsai megegyeznek, és két csúcspontosan akkor szomszédos \overline{G} -ben, ha nem szomszédosak G -ben.

Példa:

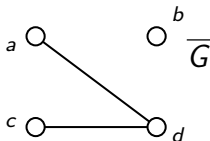
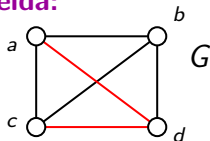


Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és \overline{G} csúcsai megegyeznek, és két csúcspontosan akkor szomszédos \overline{G} -ben, ha nem szomszédosak G -ben.

Példa:



Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Biz: A K_n teljes gráf minden éle a G és \overline{G} gráfok közül pontosan az egyikhez tartozik. Ezért $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)$ megegyezik a v csúcs K_n -beli fokszámával, azaz $n - 1$ -gyel. □

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n -ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G -ben, mint az u -nak és v -nek megfelelő sorszámú csúcsok között G' -ben. Jelölése: $G \cong G'$.

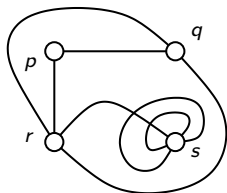
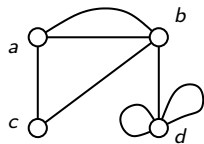
Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n -ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G -ben, mint az u -nak és v -nek megfelelő sorszámú csúcsok között G' -ben. Jelölése: $G \cong G'$.

Példa:



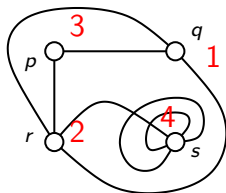
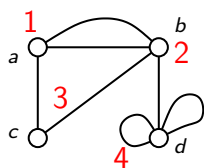
Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n -ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G -ben, mint az u -nak és v -nek megfelelő sorszámú csúcsok között G' -ben. Jelölése: $G \cong G'$.

Példa:



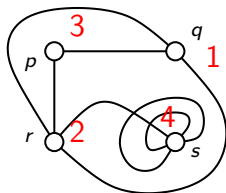
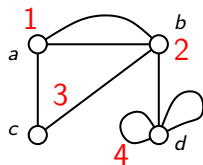
Komplementer és izomorfia

Def: A G egyszerű gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

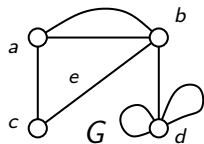
Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n -ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G -ben, mint az u -nak és v -nek megfelelő sorszámú csúcsok között G' -ben. Jelölése: $G \cong G'$.

Példa:



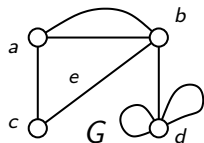
Megf: Ha $G \cong G'$, akkor G és G' lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel G -ben mint G' -ben, ugyanannyi C_4 kör található G -ben, mint G' -ben, stb.

Gráfoperációk

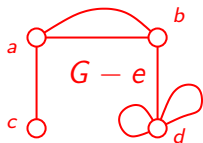


Gráfoperációk

Def:

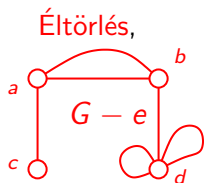
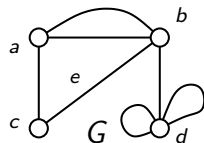


Éltörlés

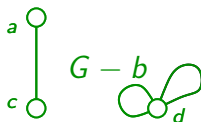


Gráfoperációk

Def:

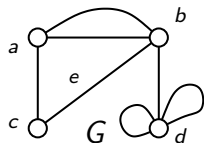


csúcsstörlés

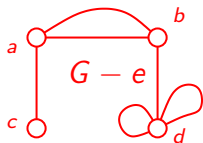


Gráfoperációk

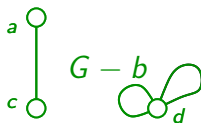
Def:



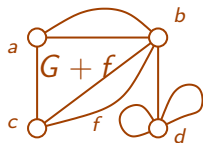
Éltörlés,



csúcs törlés,

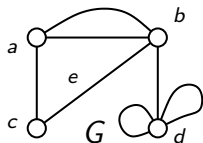


élhozzáadás.

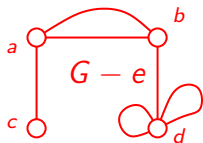


Gráfoperációk

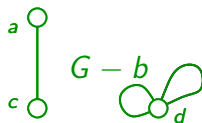
Def:



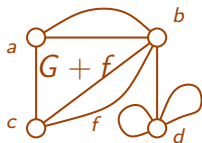
Éltörlés,



csúcs törlés,



él hozzáadás.

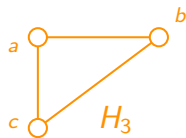
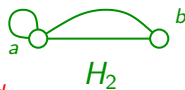
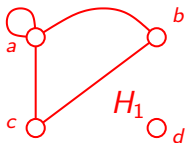
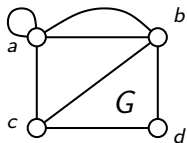


Def: **Feszítő részgráf:** éltörlésekkel kapható gráf.

Feszített részgráf: csúcs törlésekkel kapható gráf.

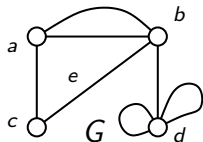
Részgráf: él- és csúcs törlésekkel kapható gráf.

Példa: H_1, H_2, H_3 a G feszítő, feszített és jelzőnélküli részgráfjai.

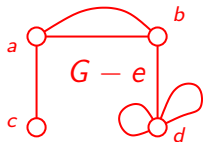


Gráfoperációk

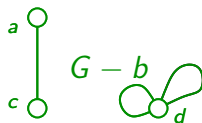
Def:



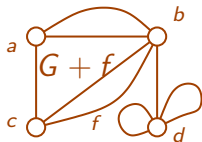
Éltörlés,



csúcsstörlés,



élhozzáadás.

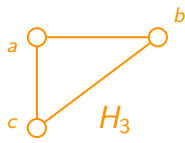
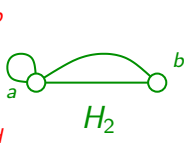
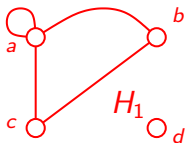
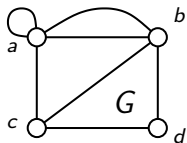


Def: Feszítő részgráf: éltörlésekkel kapható gráf.

Feszített részgráf: csúcsstörlésekkel kapható gráf.

Részgráf: él- és csúcsstörlésekkel kapható gráf.

Példa: H_1 , H_2 , H_3 a G feszítő, feszített és jelzőnélküli részgráfjai.

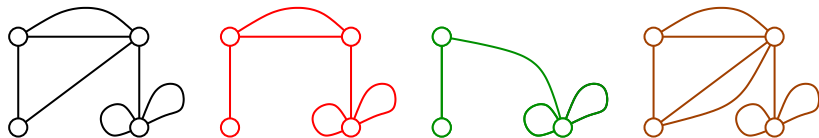


Megf: H a G részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

H a G feszítő részgráfja $\iff V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.

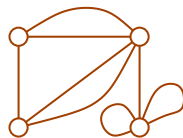
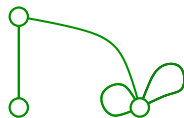
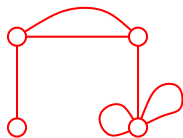
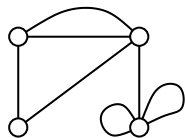
H a G feszített részgráfja $\iff V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H)$ a H csúcsai közt futó G -beli élekből áll.

Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán?

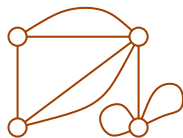
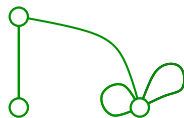
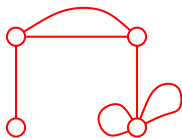
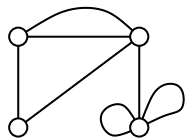
Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán?

Természetesen egy.

Furfangos kérdés

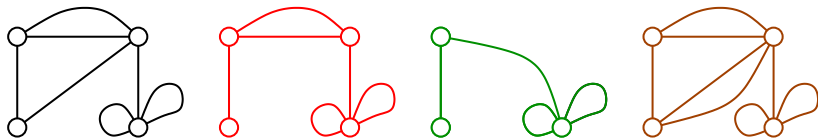


Hány gráf látható az ábrán?

(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Természetesen egy.

Furfangos kérdés



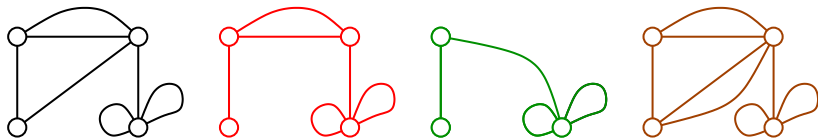
Hány gráf látható az ábrán?

Természetesen egy.

(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen éleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

Furfangos kérdés



Hány gráf látható az ábrán?

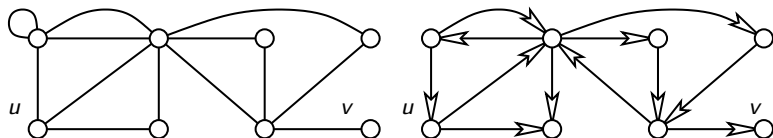
Természetesen egy.

(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen éleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

A továbbiakban a gráf csúcsainak „elérhetőségi struktúráját” vizsgáljuk.

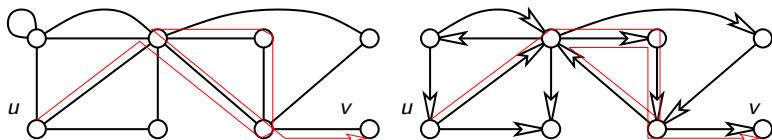
Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség

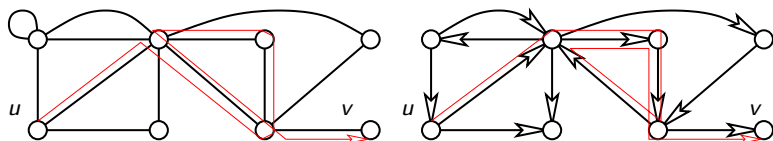


Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

(Tkp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)

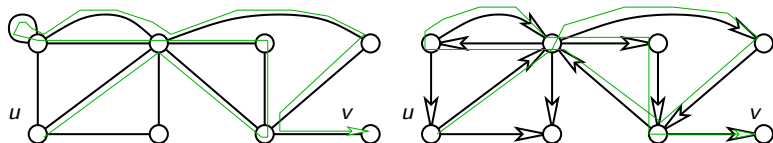
Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség

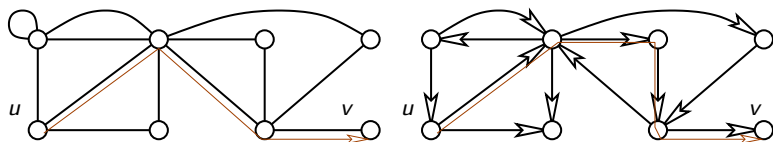


Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



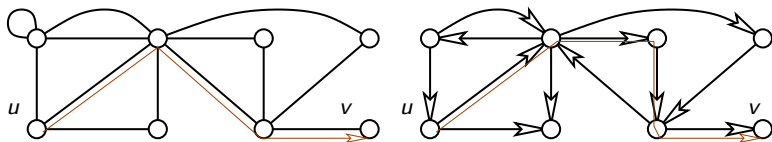
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

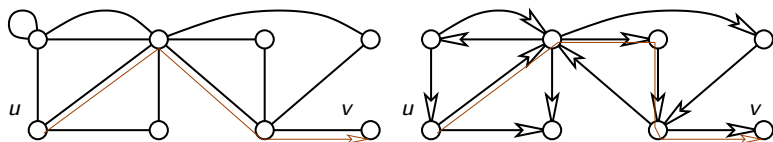
Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyben nincs ismétlődő csúcs.

Terminológia: Ha a kezdőpont u , a végpont v , akkor

uv -élsorozatról, uv -sétáról, ill. uv -útról beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy $u = v$, de a kezdő (és vég) pontot nem akarjuk megnevezni, akkor zárt élsorozatról, körsétáról ill. körről beszélünk.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



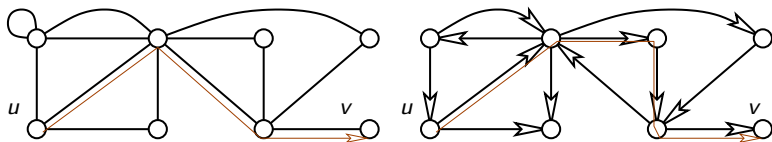
Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyben nincs ismétlődő csúcs.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

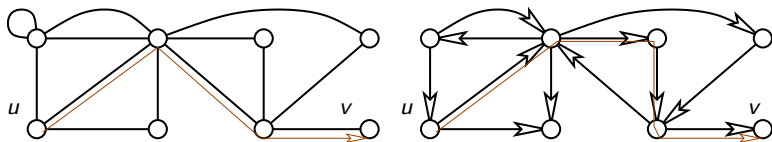
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. \square

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

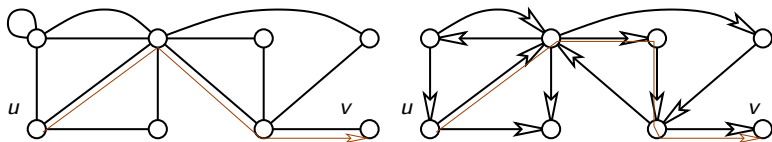
Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat.

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyben nincs ismétlődő csúcs.

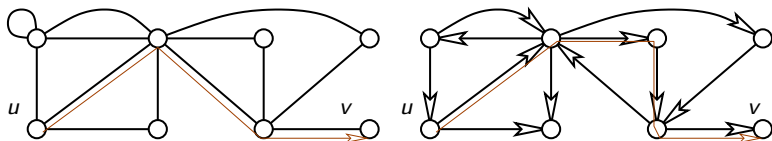
Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. \square

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út \square

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. \square

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út \square

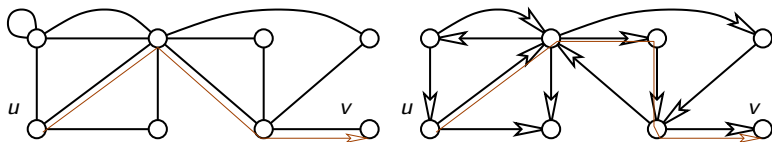
Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj: (1) Az összefüggőség szokásos definíciója nem a \sim reláció segítségével történik, hanem valahogy így:

a G irányítatlan gráfot akkor mondjuk összefüggőnek, ha G bármely két csúcsa között vezet G -beli út.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat.

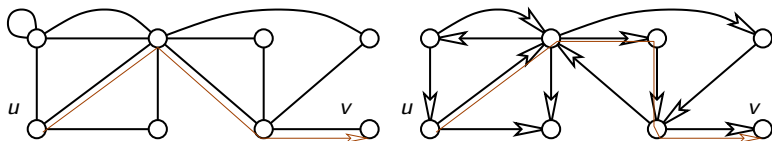
Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj:

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. \square

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út \square

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

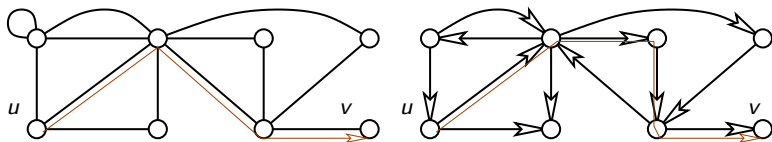
Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj: (2)

Az előző definíció irányított gráfokra is kiterjeszthető:

a G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggőnek**, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv -út G -ben.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat.

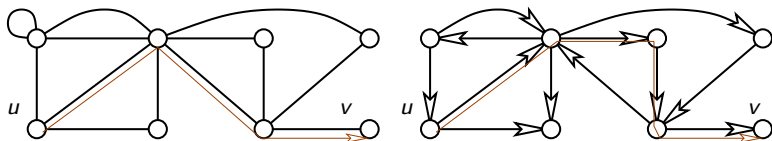
Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj:

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat.

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

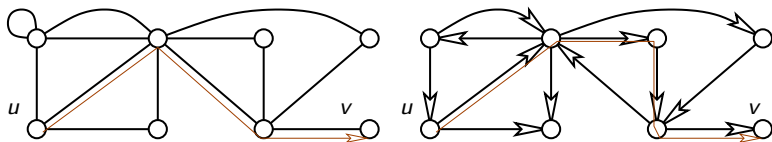
Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Megj: (3)

Irányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető:

a G irányított gráfot akkor mondjuk gyengén összefüggőnek, ha a G -nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyben nincs ismétlődő csúcs.

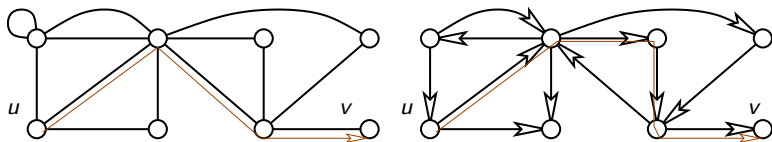
Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat. \square

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út \square

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat.

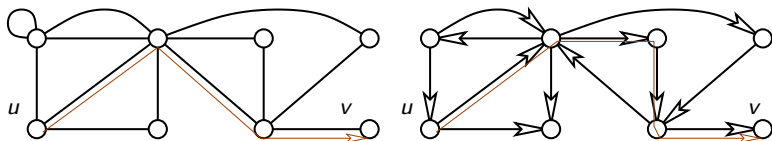
Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v elérhető ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf összefüggő, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

A következő célunk a gráfkomponens definíciója.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat.

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

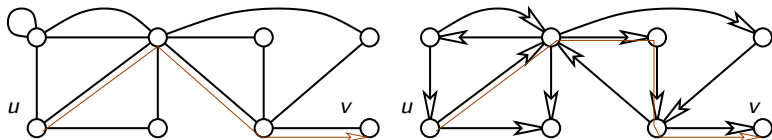
A következő célunk a gráfkomponens definíciója. Először precízen.

Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor \sim ekvivalenciareláció:

(1) $\forall u \in V(G) : u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G) : u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és

(3) $\forall u, v, w \in V(G) : u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$.

Háromféle elérhetőség, összefüggőség



Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$.

Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.

Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.

Megf: Tetsz. G -re igaz: $\exists uv$ -út $\Rightarrow \exists uv$ -séta $\Rightarrow \exists uv$ -élsorozat.

Állítás: Tetsz. G -ben igaz: $\exists uv$ -élsorozat $\Rightarrow G$ -ben $\exists uv$ -út

Def: G ir.tatlan gráf. u -ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists uv$ -út G -ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v \forall u, v \in V(G)$.

A következő célunk a gráfkomponens definíciója. Először precízen.

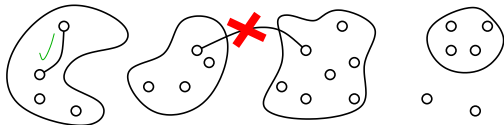
Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor \sim ekvivalenciareláció:

(1) $\forall u \in V(G) : u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G) : u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és

(3) $\forall u, v, w \in V(G) : u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$.

Def: A G gráf (**összefüggő**) **komponense** a \sim ekvivalenciaosztálya.

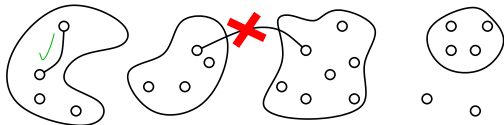
Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

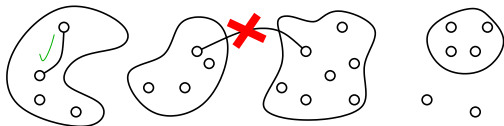
Megj: A fenti **Def** ekvivalens a korábban említett precíz (és absztrakt) definícióval. Mi a szemléletessége miatt ezt az utóbbit használjuk, jóllehet matematikai szempontból ügyetlenebb.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban

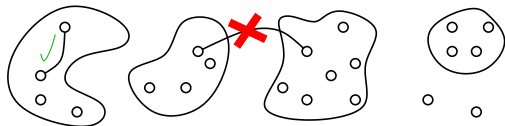


Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. \square

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



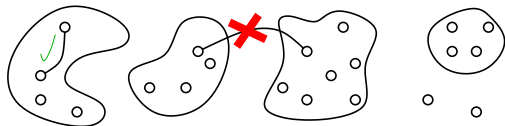
Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmazára egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

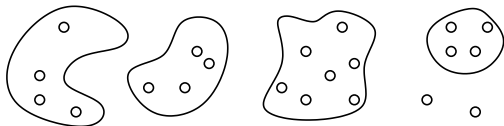
Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. \square

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. \square

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

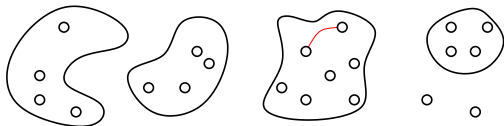
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmazára egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzzunk egy $e = uv$ élt?

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.

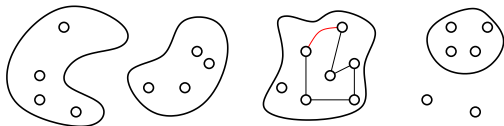
Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai G ugyanazon komponensbe esnek.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.

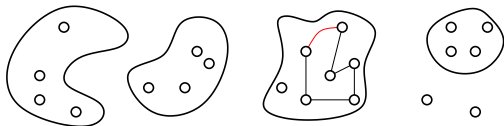
Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai G ugyanazon komponensbe esnek.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

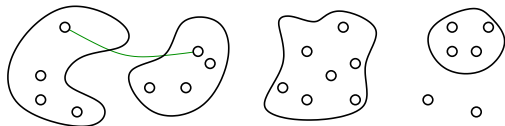
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. \square

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. \square

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzunk egy $e = uv$ élt?

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. \square

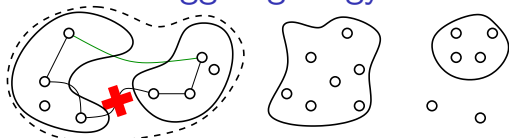
Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. \square

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzunk egy $e = uv$ élt?

II. eset: Az e él végpontjai G különböző komponenseiben vannak.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.

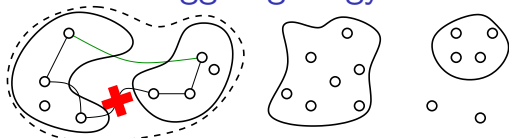
Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmazára egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Kínzó kérdés: Mi történik, ha G -be behúzzunk egy $e = uv$ élt?

II. eset: Az e él végpontjai G különböző komponenseiben vannak.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

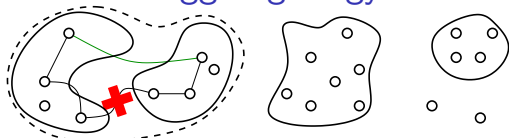
Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

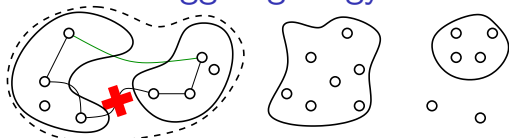
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Élhozzadási lemma (ÉIHaL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. \square

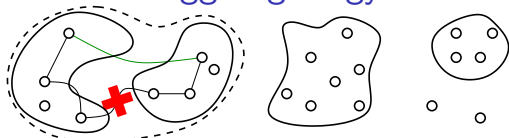
Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmazára egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. \square

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Élhozzáadási lemma (ÉIHaL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G' -nek több köre van, mint G -nek. (A keletkező kör elfajuló is lehet.)

Gráfok összefüggősége a gyakorlatban



Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G -nek, ha K -ból nem lép ki éle G -nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van.

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmazára egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára.

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

Élhozzadási lemma (ÉIHaL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G' -nek több köre van, mint G -nek. (A keletkező kör elfajuló is lehet.)

(2) G és G' körei megegyeznek, de G' -nek eggyel kevesebb komponense van, mint G -nek.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

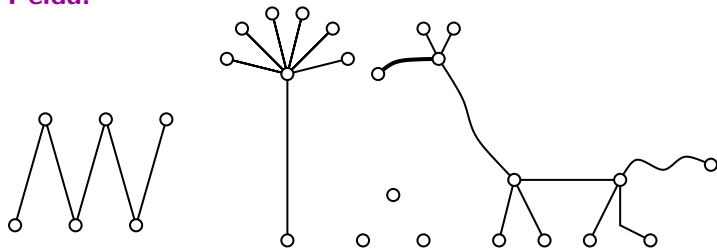
Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Példa:



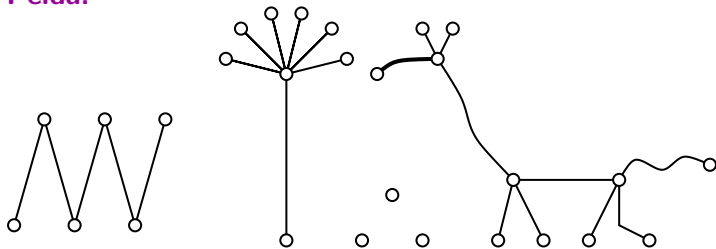
Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

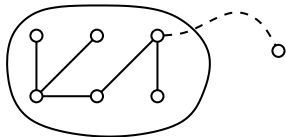
Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Példa:



Megf: (1) P_n fa minden $n \geq 1$ egész esetén.

(2) Fához egy új csúcsot egy éllel bekötve fát kapunk:



Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Biz: Építsük fel G -t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉIHaL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a komponensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n komponense van, G -nek pedig k . Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez. □

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Köv: Ha F egy n -csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Köv: Ha F egy n -csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Biz: F egy 1-komponensű erdő, így az előző Lemma alkalmazható $k = 1$ helyettesítéssel. □

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Köv: Ha F egy n -csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Köv: Ha F egy n -csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Állítás: Tetsz. n -csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.

(a) G körmentes.

(b) G összefüggő.

(c) $|E(G)| = n - 1$.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Köv: Ha F egy n -csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Állítás: Tetsz. n -csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.

(a) G körmentes.

(b) G összefüggő.

(c) $|E(G)| = n - 1$.

Biz: (a)+(b) \implies (c): \checkmark

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Köv: Ha F egy n -csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Állítás: Tetsz. n -csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.

(a) G körmentes.

(b) G összefüggő.

(c) $|E(G)| = n - 1$.

Biz: (a)+(b) \implies (c): \checkmark

(a)+(c) \implies (b): Építsük fel G -t élek egyenkénti behúzásával. $n - 1$ él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉIHaL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül $n - (n - 1) = 1$ komponens marad, tehát G öf.

Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.

Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

Megf: G erdő $\iff G$ minden komponense fa

Lemma: G n -csúcsú, k -komponensű erdő $\implies |E(G)| = n - k$.

Köv: Ha F egy n -csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Állítás: Tetsz. n -csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.

(a) G körmentes.

(b) G összefüggő.

(c) $|E(G)| = n - 1$.

Biz: (a)+(b) \implies (c): \checkmark

(a)+(c) \implies (b): Építsük fel G -t élek egyenkénti behúzásával. $n - 1$ él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉIHaL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül $n - (n - 1) = 1$ komponens marad, tehát G öf.

(b)+(c) \implies (a): Építsük fel G -t élek egyenkénti behúzásával. Mivel a komponensek száma végül 1 lesz, ezért $n - 1$ zöld élt kellett behúzni. (c) miatt G összes éle zöld, piros éle nincs. Az ÉIHaL miatt G körmentes. \square

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

- (1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.
- (2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.
- (3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.
- (4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

- (1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.
- (2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.
- (3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.
- (4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz: (1): $F - e$ erdő, hisz körmentes. $F = (F - e) + e$, és mivel F is körmentes, e zöld az ÉIHaL miatt. Ezért F -nek 1-gyel kevesebb komponense van, mint $(F - e)$ -nek. Mivel F -nek 1 komponense van, $(F - e)$ -nek 2. □

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

- (1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.
- (2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.
- (3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.
- (4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz:

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

- (1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.
- (2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.
- (3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.
- (4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz: (2): F öf, ezért van (legalább egy) uv -útja, mondjuk P . Ezen P út bármely e élét elhagyva, a kapott $F - e$ gráfnak (1) miatt két komponense van, melyek közül az egyik u -t, a másik v -t tartalmazza. Ezért $(F - e)$ -ben nincs uv -út. Azt kaptuk, hogy P minden éle benne van F minden uv -útjában, ezért F -ben P -n kívül nincs más uv -út. □

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

- (1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.
- (2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.
- (3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.
- (4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz:

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

(1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.

(2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.

(3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.

(4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz: (3): Tfh $e = uv$. Mivel F körmentes, ezért $F + e$ minden köre e -ből és F egy uv -útjából tevődik össze. Ezért $F + e$ köreinek száma megegyezik az F fa uv -útjainak számával, ami (2) miatt pontosan 1. □

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

- (1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.
- (2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.
- (3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.
- (4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz:

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

(1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.

(2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.

(3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.

(4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz: (4): (Algebrai út) A KFL miatt

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n - 1) - 2n = -2.$$

F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A

fenti összeg csak úgy lehet -2 , ha F -nek legalább 2 levele van. \square

Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

(1) $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$ -re.

(2) F -nek pontosan egy uv -útja van $\forall u, v \in V(F)$ -re.

(3) $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$ -re.

(4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz: (4): (Algebrai út) A KFL miatt

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n - 1) - 2n = -2.$$

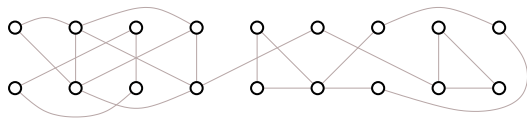
F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A

fenti összeg csak úgy lehet -2 , ha F -nek legalább 2 levele van. \square

(4): (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetsz. v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tudunk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v -től különböző u levélben történhet.

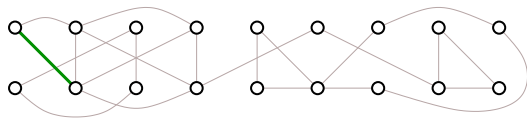
Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u -tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indulhatjuk v -ből egy másik él mentén. Ekkor egy u -tól különböző levélben akadunk el. \square

Feszítőfák



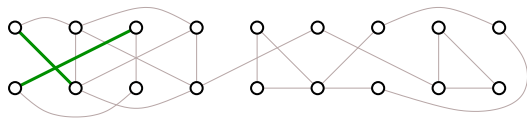
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



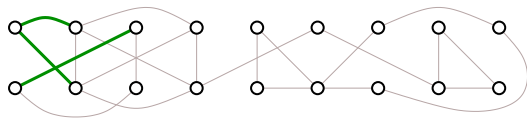
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



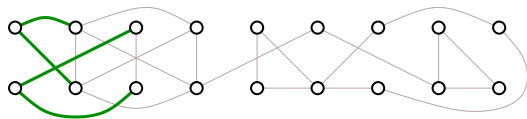
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



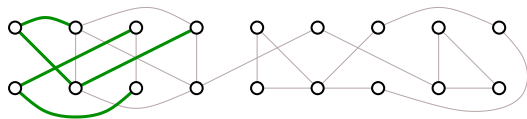
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



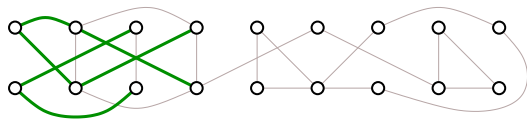
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



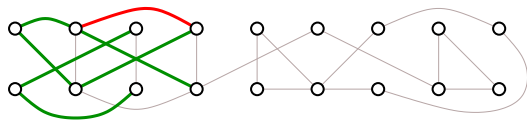
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



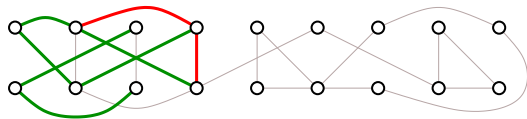
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



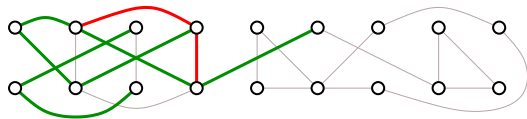
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



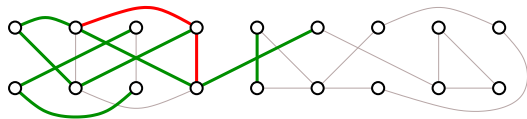
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



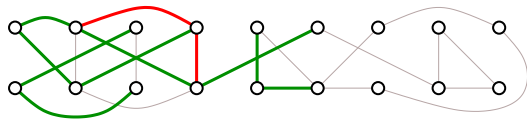
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



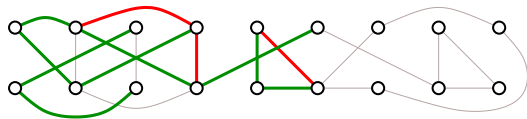
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



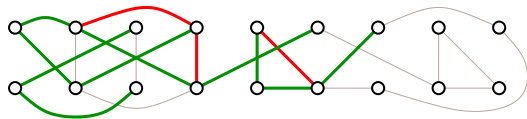
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



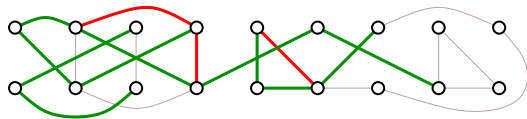
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



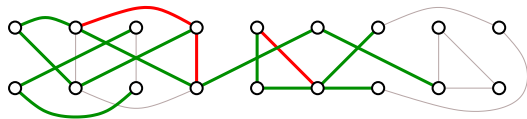
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



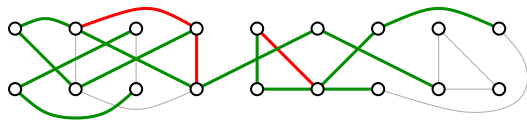
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



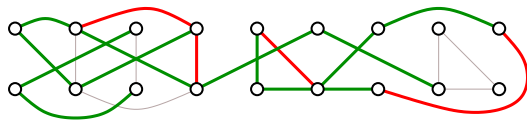
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



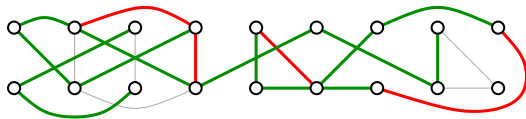
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



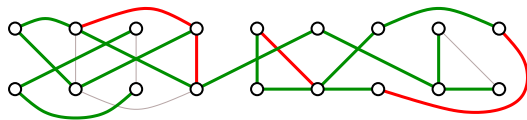
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



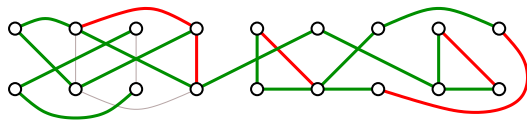
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



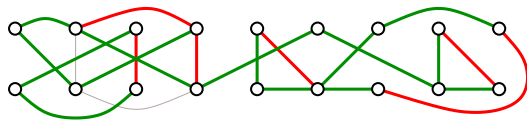
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



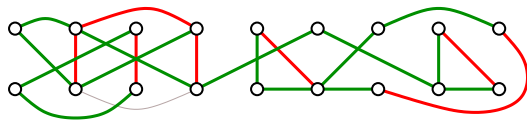
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



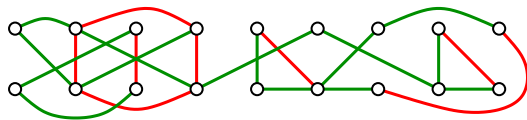
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



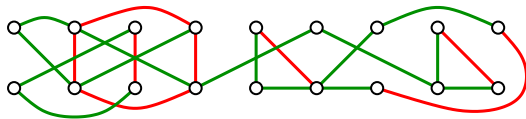
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

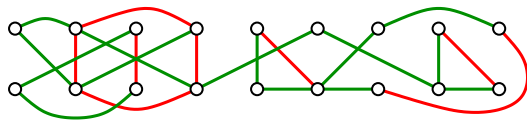
Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!

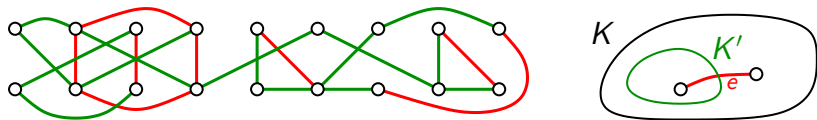
Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!
 G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel.

Feszítőfák

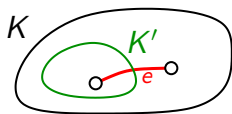
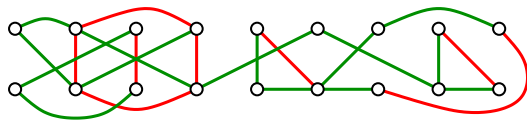


Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!
 G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel.

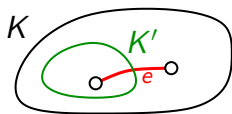
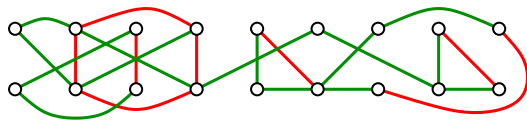
G' minden K' komponense részhalmaza G egy K komponensének. Ha $K' \neq K$, akkor G -nek van olyan éle, ami kilép K' -ből. Ezen élek mind pirosak K' definíciója miatt. Legyen e ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az e él nem tudott kört alkotni a korábban kiszínezettekkel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint G és G' komponensei megegyeznek.

Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

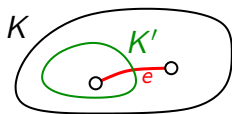
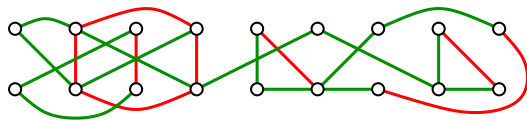
Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. \square

Feszítőfák

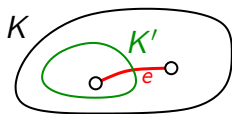
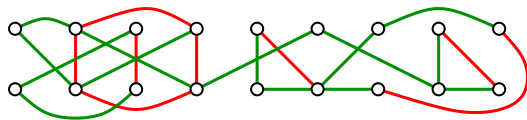


Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. \square

Def: F a G gráf **feszítőfája** (ffája), ha F egy G -ből éltörlésekkel kapható fa.

Feszítőfák



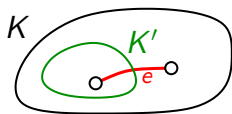
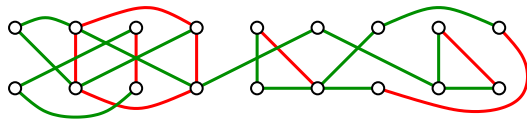
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. \square

Def: F a G gráf **feszítőfája** (ffája), ha F egy G -ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: $(G$ -nek van feszítőfája) $\iff (G$ öf.)

Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

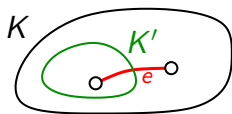
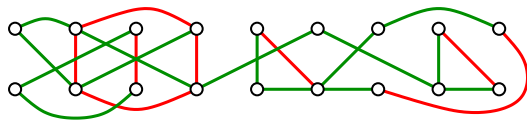
Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. □

Def: F a G gráf **feszítőfája** (ffája), ha F egy G -ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: $(G$ -nek van feszítőfája) $\iff (G$ öf.)

Biz: \Rightarrow : Legyen F a G ffája. F öf, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F -beli út.

Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. □

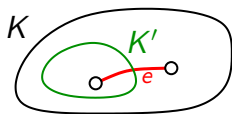
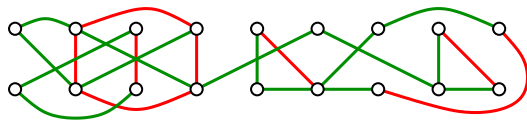
Def: F a G gráf **feszítőfája** (ffája), ha F egy G -ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G -nek van feszítőfája) \iff (G öf.)

Biz: \Rightarrow : Legyen F a G ffája. F öf, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F -beli út.

\Leftarrow : Építsük fel G -t az élek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen komponense van, hiszen G is egykomponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G -ből éltörlésekkel kapható. □

Feszítőfák



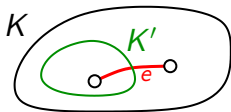
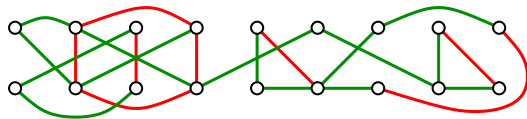
Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. \square

Def: F a G gráf **feszítőfája** (ffája), ha F egy G -ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: $(G\text{-nek van feszítőfája}) \iff (G \text{ öf.})$

Feszítőfák



Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉIHaL szerinti kiszínezésével!

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. □

Def: F a G gráf **feszítőfája** (ffája), ha F egy G -ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G -nek van feszítőfája) \iff (G öf.)

Megj: Ha egy nem feltétlenül összefüggő G gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek G minden komponensének egy F feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő G esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a G **feszítő erdeje**.

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak
- ▶ Élsorozat, séta, út, összefüggőség

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak
- ▶ Élsorozat, séta, út, összefüggőség
- ▶ Élhozzáadási lemma

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak
- ▶ Élsorozat, séta, út, összefüggőség
- ▶ Élhozzáadási lemma
- ▶ Fák és erdők

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak
- ▶ Élsorozat, séta, út, összefüggőség
- ▶ Élhozzáadási lemma
- ▶ Fák és erdők
- ▶ Fák tulajdonságai, feszítőfa keresése

Mit tanultunk ma?

- ▶ Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- ▶ Kézfogás-lemma
- ▶ Gráf komplementere, izomorfia, részgráf fogalmak
- ▶ Élsorozat, séta, út, összefüggőség
- ▶ Élhozzáadási lemma
- ▶ Fák és erdők
- ▶ Fák tulajdonságai, feszítőfa keresése

Köszönöm a figyelmet!