A számítástudomány alapjai

Euler-séták és Hamilton-körök

2024. október 15.

Hol tartunk, és hogyan tovább?

Hol tartunk, és hogyan tovább?

- BFS, Dijkstra, DFS, DAG, PERT

Hol tartunk, és hogyan tovább?

- BFS, Dijkstra, DFS, DAG, PERT
- Ma másképpen szeretnénk bejárni a gráfot: az éleket (ill. a csúcsokat) sorban szeretnénk végiglátogatni.

Hol tartunk, és hogyan tovább?

- BFS, Dijkstra, DFS, DAG, PERT
- Ma másképpen szeretnénk bejárni a gráfot: az éleket (ill. a csúcsokat) sorban szeretnénk végiglátogatni.
- Ez néha lehetséges, néha nem. Erre keresünk szükséges ill. elégséges feltételt.

Hol tartunk, és hogyan tovább?

- BFS, Dijkstra, DFS, DAG, PERT
- Ma másképpen szeretnénk bejárni a gráfot: az éleket (ill. a csúcsokat) sorban szeretnénk végiglátogatni.
- Ez néha lehetséges, néha nem. Erre keresünk szükséges ill. elégséges feltételt.
- A mai anyagot számonkérjük az 1. ZH-n, a jövő hetit már nem.

Hol tartunk, és hogyan tovább?

- BFS, Dijkstra, DFS, DAG, PERT
- Ma másképpen szeretnénk bejárni a gráfot: az éleket (ill. a csúcsokat) sorban szeretnénk végiglátogatni.
- Ez néha lehetséges, néha nem. Erre keresünk szükséges ill. elégséges feltételt.
- A mai anyagot számonkérjük az 1. ZH-n, a jövő hetit már nem.
- KJMTV: X.18. 14h IB028

Hol tartunk, és hogyan tovább?

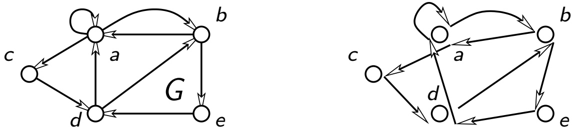
- BFS, Dijkstra, DFS, DAG, PERT
- Ma másképpen szeretnénk bejárni a gráfot: az éleket (ill. a csúcsokat) sorban szeretnénk végiglátogatni.
- Ez néha lehetséges, néha nem. Erre keresünk szükséges ill. elégséges feltételt.
- A mai anyagot számonkérjük az 1. ZH-n, a jövő hetit már nem.
- KJMTV: X.18. 14h IB028, `www.bolyai.hu/versenyek`

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.



Megj: (1) A fenti definíció 2×2 fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is.
(2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta G minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kívánalom, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra.
(3) Irányítatlan Euler-séta: „G egy vonallal lerajzolható".
Cél: Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Euler-séták

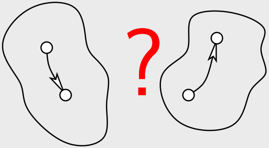
Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Biz: (a) Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓



Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Biz: (a) Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

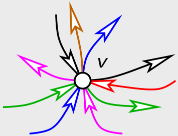
Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Biz: (a) Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből. ✓

(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor pontosan annyiszor lépünk be a v csúcsba ill. ki a v csúcsból, ahányszor áthalad a körséta a v csúcson. Mivel a körséta G minden élét pontosan egyszer érinti, ezért $\rho(v) = \delta(v)$. □



Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
  (a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
  (b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
  (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
  (b) G-ben minden fokszám páros.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

Biz: Az irányított esethez hasonló. (a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is egy-egy élét, és (b) az Euler-körsétát követve tetszőleges v csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért $d(v)$ páros. $\square$

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
- (a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
- (b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
- (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
- (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
- (b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
 (a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
 (b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
 (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
 (b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
 (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
 (b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Biz: (a)✓. (b): Tfh G Euler-sétája egy uv-séta. Ekkor minden $w \neq u, v$ csúcsra $d(w)$ kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta w-n áthalad, vagyis $d(w)$ páros. Ha $u = v$, akkor az Euler-séta körséta, így $d(u)$ is páros (2b) miatt. Ha pedig $u \neq v$, akkor u-ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be, v-be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis $d(u)$ és $d(v)$ páratlanok. $\square$

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
  (a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
  (b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
  (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
  (b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
  (a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
  (b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és

(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor

(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és

(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti **Megfigyelés** segítségével **bizonyos** esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti **Megfigyelés** segítségével **bizonyos** esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

Kínzó kérdés: Lehet-e a **Megfigyelés**ben leírtaktól eltérő oka annak, hogy egy G gráfnak nincs Euler-(kör)sétája?

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti **Megfigyelés** segítségével **bizonyos** esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

Kínzó kérdés: Lehet-e a **Megfigyelés**ben leírtaktól eltérő oka annak, hogy egy G gráfnak nincs Euler-(kör)sétája?

Megnyugtató válasz:

Euler-séták

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
(b) minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megj: A fenti **Megfigyelés** segítségével **bizonyos** esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

Kínzó kérdés: Lehet-e a **Megfigyelés**ben leírtaktól eltérő oka annak, hogy egy G gráfnak nincs Euler-(kör)sétája?

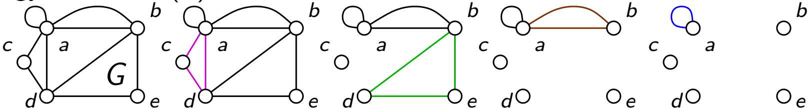
Megnyugtató válasz: Nem lehet.

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \ \ \forall \ v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall \ v \in V(G)$.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \ \ \forall\, v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall\, v \in V(G)$.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.



Biz: Induljunk el G egy éle mentén, és haladjunk tovább az élek mentén. Mivel G Euler, ezért sosem akadunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy C_1 kört. C_1 éleit törölve $G - C_1$ Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a $G - C_1$ gráfon. Így G minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapjuk a $C_2, C_3, \ldots$ köröket. Ezért $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a C_i kör éleit az i-dik színnel. $\square$
(Fent az irányítatlan esetet illusztráltuk, irányított esetben az érvelés ugyanez, az ábrákon pedig irányított élek kellenének.)

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

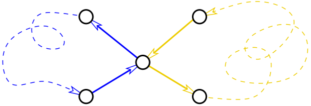
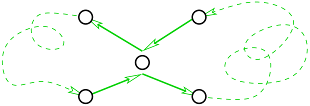
Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \ \ \forall\, v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall\, v \in V(G)$.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \ \ \forall \ v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall \ v \in V(G)$.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \;\; \forall \, v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall \, v \in V(G)$.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. ✓ $\Leftarrow$: A **Lemma** miatt $E(G)$ felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, amiknek van közös csúcsa és ezen csúcs mentén az ábra szerint „összevarrjuk” azokat. Mindezt addig tudjuk végezni, míg végül csak egyetlen körséta marad. □

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \ \ \forall \ v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall \ v \in V(G)$.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \;\; \forall\, v \in V(G)$.

A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall\, v \in V(G)$.

Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)

(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)

(3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\Longleftrightarrow$ (G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \ \ \forall\ v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall\ v \in V(G)$.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
(3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\iff$ (G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)
Biz: $\Rightarrow$: Láttuk. $\checkmark$ $\Leftarrow$: Ha G Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha G nem Euler-gráf, akkor legyenek u és v a G ptn fokú csúcsai. Ekkor $G + uv$ Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy ezen körséta utolsó éle uv. Ezt az uv élt elhagyva a körsétából, G Euler-sétáját kapjuk. $\square$

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \ \ \forall\, v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall\, v \in V(G)$.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
(3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\Longleftrightarrow$ (G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)

Az Euler-tulajdonság karakterizációja

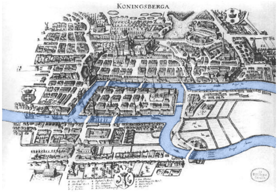
Def: A G irányított gráf Euler-gráf, ha $\delta(v) = \rho(v) \quad \forall\ v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf Euler-gráf, ha G $d(v)$ páros $\forall\ v \in V(G)$.
Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.
Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\iff$ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
(3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\iff$ (G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)
Euler-körséta keresése Euler-gráfban: $E(G)$-t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

Történelem

Leonhard Euler a porosz Königsbergben élt és alkotott. Különös probléma tartotta lázban akkortájt a helyi polgárokat.

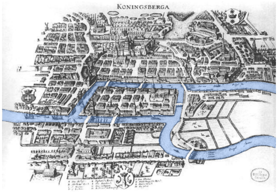
Történelem

Leonhard Euler a porosz Königsbergben élt és alkotott. Különös probléma tartotta lázban akkortájt a helyi polgárokat. Tervezhető-e olyan útvonal a városban, ami mind a hét hidat pontosan egyszer érinti?

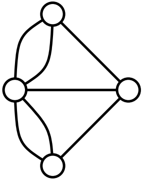


Történelem

Leonhard Euler a porosz Königsbergben élt és alkotott. Különös probléma tartotta lázban akkortájt a helyi polgárokat. Tervezhető-e olyan útvonal a városban, ami mind a hét hidat pontosan egyszer érinti?

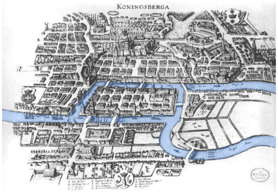


Euler megfigyelte, hogy csak a hidakon való áthaladás sorrendje számít, az nem, hogy az egyes szárazföldeken miféle útvonalat követünk. Ezért a szárazfölddarabokat ponttal, a hidakat ezen pontokat összekötő vonalakkal ábrázolta. Az így adódó gráfon épp egy (mai szóhasználattal) Euler-séta létezése volt a kérdés.

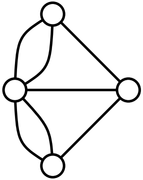


Történelem

Leonhard Euler a porosz Königsbergben élt és alkotott. Különös probléma tartotta lázban akkortájt a helyi polgárokat. Tervezhető-e olyan útvonal a városban, ami mind a hét hidat pontosan egyszer érinti?



Euler megfigyelte, hogy csak a hidakon való áthaladás sorrendje számít, az nem, hogy az egyes szárazföldeken miféle útvonalat követünk. Ezért a szárazfölddarabokat ponttal, a hidakat ezen pontokat összekötő vonalakkal ábrázolta. Az így adódó gráfon épp egy (mai szóhasználattal) Euler-séta létezése volt a kérdés.



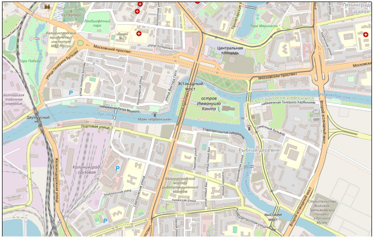
A gráf mind a 4 csúcsa páratlan fokszámú, ezért hiú ábránd a fenti tulajdonságú útvonal megtalálása.

Történelem 2.

Königsberg mai neve Kalinyingrád, és a Kalinyingrádi terület nevű orosz exklávé székhelyeként stratégiai jelentősége van. A korableli hidak közül több már nem létezik.

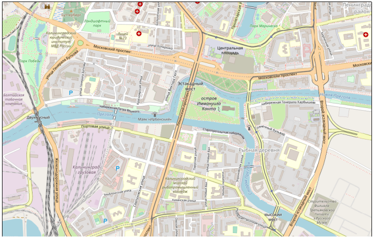
Történelem 2.

Königsberg mai neve Kalinyingrád, és a Kalinyingrádi terület nevű orosz exklávé székhelyeként stratégiai jelentősége van. A korabeli hidak közül több már nem létezik.



Történelem 2.

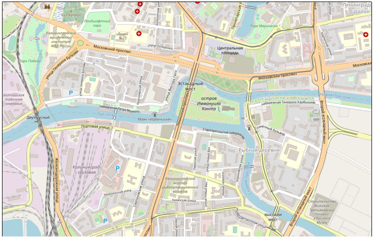
Königsberg mai neve Kalinyingrád, és a Kalinyingrádi terület nevű orosz exklávé székhelyeként stratégiai jelentősége van. A korabeli hidak közül több már nem létezik.



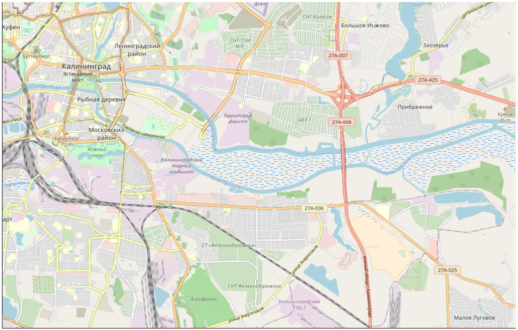
Nem véletlen, hogy a keleti szigetnek csak egy része látható a szokásos szemléltető ábrákon.

Történelem 2.

Königsberg mai neve Kalinyingrád, és a Kalinyingrádi terület nevű orosz exklávé székhelyeként stratégiai jelentősége van. A korabeli hidak közül több már nem létezik.



Nem véletlen, hogy a keleti szigetnek csak egy része látható a szokásos szemléltető ábrákon.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.
Megj: A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja.
Sajnos jól használható szükséges **és** elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén segítenek a megoldáshoz.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.
(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: A fenti feltétel szerint k csúcs törlésétől a gráf legfeljebb k (ill. $k + 1$) komponensre eshet szét. Ez feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy G-nek legyen Hamilton-köre (ill. -útja). Csupán abból, hogy G-re teljesül ez a feltétel, nem következik, hogy G-nek csakugyan van Hamilton-köre (vagy -útja). Ám ha a szükséges feltétel nem teljesül egy G gráfra, az azonnal cáfolja G-ben a Hamilton-kör (ill. -út) létezését. Ha pl. egy G gráf 42 csúcs törlése nyomán 43 komponensre esik szét, akkor G-nek bizonyosan nincs Hamilton-köre. Ha pedig ez a komponensszám legalább 44, akkor afelől is biztosak lehetünk, hogy G-nek még Hamilton-útja sincs.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

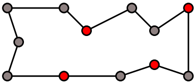
Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

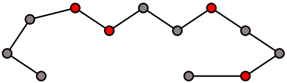
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Biz: (1,2) G-re tekinthetjük úgy, mint egy körre (ill. útra), amihez további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k (ill. $k+1$) komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz adunk G felépítéséhez) az ÉHL miatt csak csökkenteni tudják a komponensek számát, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k (ill. $k+1$) komponens keletkezhet. $\square$





Hamilton-körök és -utak

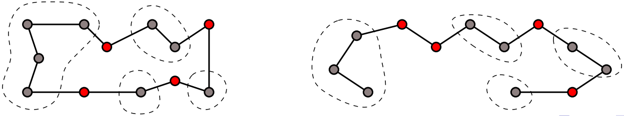
Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Biz: (1,2) G-re tekinthetjük úgy, mint egy körre (ill. útra), amihez további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k (ill. $k+1$) komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz adunk G felépítéséhez) az ÉHL miatt csak csökkenteni tudják a komponensek számát, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k (ill. $k+1$) komponens keletkezhet. □



Hamilton-körök és -utak

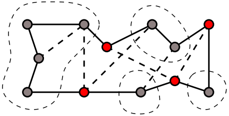
Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

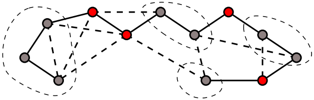
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Biz: (1,2) G-re tekinthetjük úgy, mint egy körre (ill. útra), amihez további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k (ill. $k+1$) komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz adunk G felépítéséhez) az ÉHL miatt csak csökkenteni tudják a komponensek számát, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k (ill. $k+1$) komponens keletkezhet. $\square$





Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

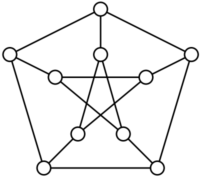
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesül rá a fenti, szükséges feltétel.
2. Nincs Hamilton-köre.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

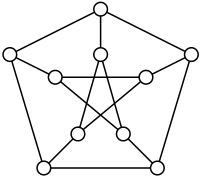
Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesül rá a fenti, szükséges feltétel.
2. Nincs Hamilton-köre.



1\. **Biz:** Tfh külső körből k_1, a belsőből k_2 csúcsot hagytunk el. Ha $k_1 = 0$ vagy $k_2 = 0$, akkor a gráf összefüggő marad. Különben a külső kör legfeljebb k_1, a belső pedig legfeljebb k_2 részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb $k_1 + k_2$ komponens keletkezik.

Hamilton-körök és -utak

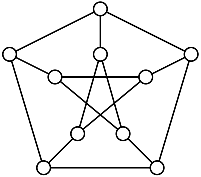
Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.
(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesül rá a fenti, szükséges feltétel.
2. Nincs Hamilton-köre.



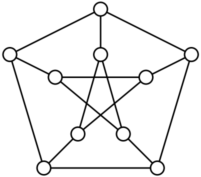
Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.
(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.
1. Teljesül rá a fenti, szükséges feltétel.
2. Nincs Hamilton-köre.



2. **Biz:** Ha lenne H-kör, akkor e kör 10 élét felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, egy sárga és egy zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

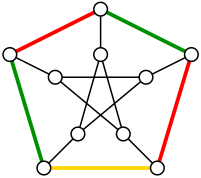
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesül rá a fenti, szükséges feltétel.
2. Nincs Hamilton-köre.

2. **Biz:** Ha lenne H-kör, akkor e kör 10 élét felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, egy sárga és egy zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



Hamilton-körök és -utak

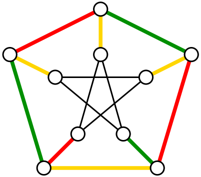
Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.
(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.
1. Teljesül rá a fenti, szükséges feltétel.
2. Nincs Hamilton-köre.

2. **Biz:** Ha lenne H-kör, akkor e kör 10 élét felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, egy sárga és egy zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

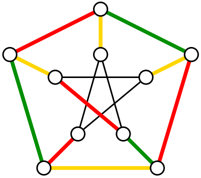
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesül rá a fenti, szükséges feltétel.
2. Nincs Hamilton-köre.

2. **Biz:** Ha lenne H-kör, akkor e kör 10 élét felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, egy sárga és egy zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

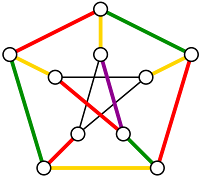
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.

1. Teljesül rá a fenti, szükséges feltétel.
2. Nincs Hamilton-köre.

2. **Biz:** Ha lenne H-kör, akkor e kör 10 élét felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, egy sárga és egy zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet.



Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.
(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

A továbbiakban Hamilton-kör létezését igazoló, könnyen ellenőrizhető elégséges feltételeket fogunk mutatni. Ha ezek bármelyike teljesül egy G gráfra, akkor G-nek van Hamilton-köre. Pusztán abból, hogy egy G gráfra nem teljesül az elégséges feltétel, semmiféle következtetés nem vonható le G Hamilton-körének létezéséről.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.
(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Def: Legyen egy G n-csúcsú, egyszerű gráf.
Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$.
A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$-re.
A G gráfra teljesül az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot: $uv \notin E \Rightarrow d(u) + d(v) \geq n$.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Def: Legyen egy G n-csúcsú, egyszerű gráf.

Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$.

A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$-re.

A G gráfra teljesül az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot: $uv \notin E \Rightarrow d(u) + d(v) \geq n$.

Dirac tétele: G-re igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Def: Legyen egy G n-csúcsú, egyszerű gráf.

Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$.

A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$-re.

A G gráfra teljesül az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot: $uv \notin E \Rightarrow d(u) + d(v) \geq n$.

Dirac tétele: G-re igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Ore tétele: G-re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf Hamilton-köre (Hamilton-útja) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Def: Legyen egy G n-csúcsú, egyszerű gráf.

Az $u, v \in V(G)$ csúcspár gazdag, ha $d(u) + d(v) \geq n$.

A G gráfra teljesül a Dirac-feltétel, ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$-re.

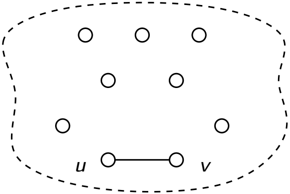
A G gráfra teljesül az Ore-feltétel, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot: $uv \notin E \Rightarrow d(u) + d(v) \geq n$.

Dirac tétele: G-re igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Ore tétele: G-re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Megj: A Dirac-feltétel többet kíván, mint az Ore-feltétel. Ezért Ore tétele erősebb Diracénál, u.i. kevesebbet feltételez, de ugyanazt igazolja. Az Ore-tétel bizonyítása ezért Dirac tételét is igazolja.

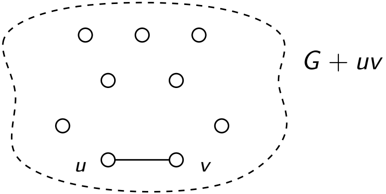
A Chvátal-lezárt



$G + uv$

Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

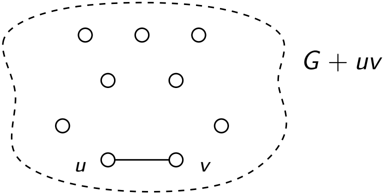
A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

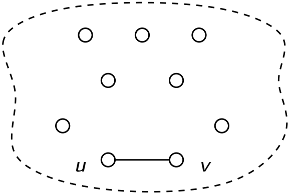
Megj: A hízlalási lemma jelentősége az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e G-ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanis, hogy G-ben a gazdag párok közé „ingyen" húzhatunk be éleket, mert ez nem változtat azon a tényen, hogy van-e Hamilton-köre a vizsgált gráfnak. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó $\overline{G}$ gráfban (G ú.n. Chvátal-lezártjában) találunk Hamilton-kört, akkor G-nek is bizonyosan van Hamilton-köre. Ha pedig $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze G-ben sincs.

A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

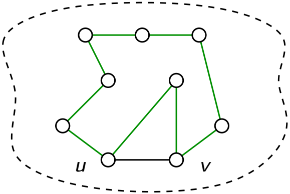
A Chvátal-lezárt



$G + uv$

Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).
Biz: $\Rightarrow$: ✓

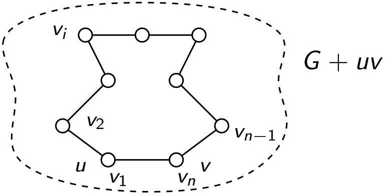
A Chvátal-lezárt



$G + uv$

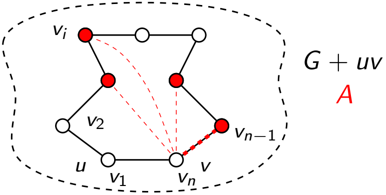
Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).
Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk.

A Chvátal-lezárt



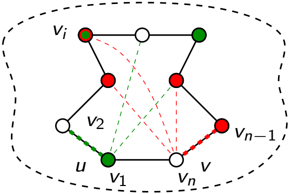
Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).
Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$.

A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).
Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza

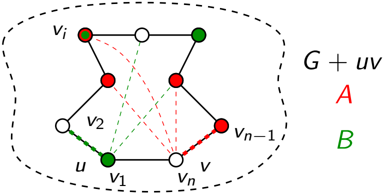
A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \dots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.

A Chvátal-lezárt

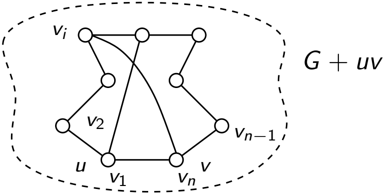


Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap B \neq \emptyset$. Legyen pl. $v_i \in A \cap B$.

A Chvátal-lezárt

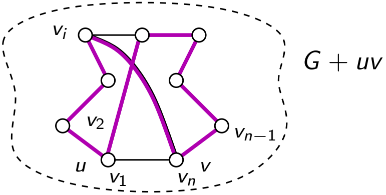


Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.

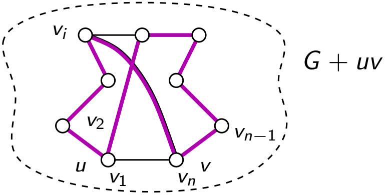
Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap B \neq \emptyset$. Legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor

A Chvátal-lezárt



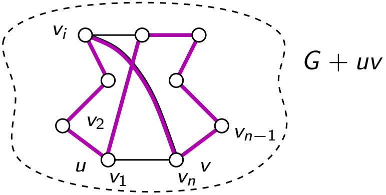
Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).
Biz: $\Rightarrow$: ✓ $\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.
Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \le n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \ge n$. Ezek szerint $A \cap B \ne \emptyset$. Legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$ a G egy H-köre.

A Chvátal-lezárt



Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár.
(G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

A Chvátal-lezárt

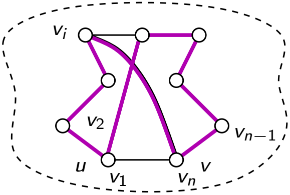


Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van H-köre.

Biz: A hízlalási lemma alapján G bármely két nemszomszédos csúcsát „ingyen" összeköthetjük. Így G Chátal-lezártja a $\overline{G} = K_n$ teljes gráf. Mivel K_n-nek van H-köre, ezért G-nek is van. $\square$

A Chvátal-lezárt



$G + uv$

Hízlalási lemma: Tfh G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. (G-nek van Hamilton-köre) $\iff$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van H-köre.

Biz: A hízlalási lemma alapján G bármely két nemszomszédos csúcsát „ingyen" összeköthetjük. Így G Chátal-lezártja a $\overline{G} = K_n$ teljes gráf. Mivel K_n-nek van H-köre, ezért G-nek is van. $\square$

Dirac-tétel: Ha $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, akkor G-nek van H-köre.

Biz: G bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért G-re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt G-nek van H-köre. $\square$

(Egyébként közvetlenül is látszik, hogy $\overline{G} = K_n$.)

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-(kör)séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-(kör)séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-(kör)séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-(kör)séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.
- A tanult szükséges feltétel **sérülése** cáfolja a Hamilton-kör/út létezését.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-(kör)séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.
- A tanult szükséges feltétel **sérülése** cáfolja a Hamilton-kör/út létezését.
- Bármelyik tanult elégséges feltétel **teljesülése** igazolja a Hamilton kör létezését.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-(kör)séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.
- A tanult szükséges feltétel **sérülése** cáfolja a Hamilton-kör/út létezését.
- Bármelyik tanult elégséges feltétel **teljesülése** igazolja a Hamilton kör létezését.
- A hízlalási lemma rendkívül hatékony eszköz a Hamilton-kör létezésének eldöntéséhez.

Mit tanultunk ma?

- Irányított/irányítatlan Euler-(kör)séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.
- A tanult szükséges feltétel **sérülése** cáfolja a Hamilton-kör/út létezését.
- Bármelyik tanult elégséges feltétel **teljesülése** igazolja a Hamilton kör létezését.
- A hízlalási lemma rendkívül hatékony eszköz a Hamilton-kör létezésének eldöntéséhez.

Köszönöm a figyelmet!