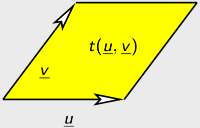
A számítástudomány alapjai

Négyzetes mátrixok determinánsa

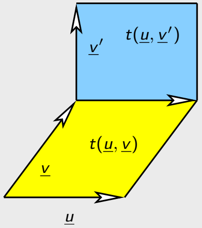
2024. november 19.

Paralelogramma területe



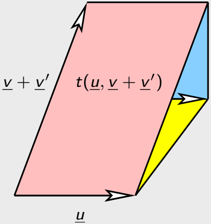
Def: $t(\underline{u}, \underline{v})$: az $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma területe.

Paralelogramma területe



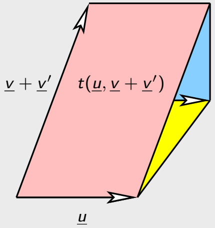
Def: $t(\underline{u}, \underline{v})$: az $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma területe.

Paralelogramma területe



Def: $t(\underline{u}, \underline{v})$: az $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma területe.

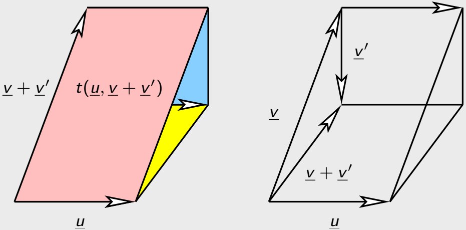
Paralelogramma területe



Def: $t(\underline{u}, \underline{v})$: az $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma területe.

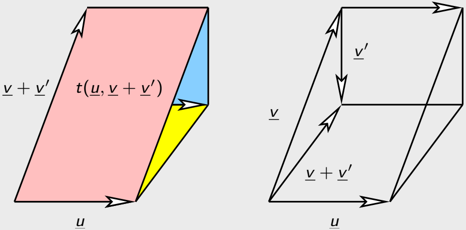
Megf: $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda\underline{v}) \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Paralelogramma területe



Def: $t(\underline{u},\underline{v})$: az $\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma területe.
Megf: $t(\underline{u},\underline{v}+\underline{v}') = t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u},\underline{v}')$, $t(\underline{u}+\underline{u}',\underline{v}) = t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u}',\underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u},\underline{v})=\lambda t(\underline{u},\underline{v})=t(\underline{u},\lambda\underline{v})\quad\forall\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

Paralelogramma területe

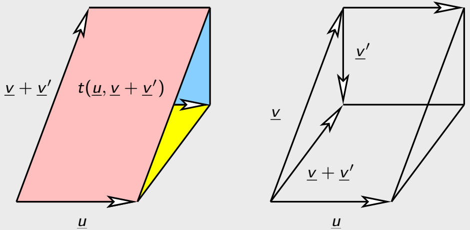


Def: $t(\underline{u}, \underline{v})$: az $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma területe.

Megf: $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda \underline{v}) \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen.

Paralelogramma területe



Def: $t(\underline{u}, \underline{v})$: az $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma területe.

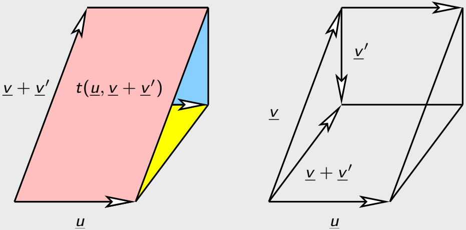
Megf: $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda \underline{v}) \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen.

Konkrétan: $t(\underline{u}, \underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson.

Megállapodhatunk abban, hogy $t(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 1$ (és persze $t(\underline{e}_2, \underline{e}_1) = -1$).

Paralelogramma területe



Def: $t(\underline{u}, \underline{v})$: az $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma **előjeles** területe.

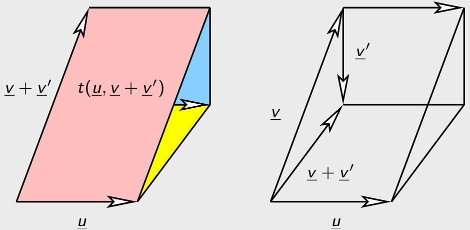
Megf: $t(\underline{u}, \underline{v} + \underline{v}') = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}, \underline{v}')$, $t(\underline{u} + \underline{u}', \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v}) + t(\underline{u}', \underline{v})$, ill. $t(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = \lambda t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \lambda \underline{v}) \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u}, \underline{v})$ negatív is lehessen.

Konkrétan: $t(\underline{u}, \underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson.

Megállapodhatunk abban, hogy $t(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 1$ (és persze $t(\underline{e}_2, \underline{e}_1) = -1$).

Paralelogramma területe



Def: $t(\underline{u},\underline{v})$: az $\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma **előjeles** területe.

Megf: $t(\underline{u},\underline{v}+\underline{v}')=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u},\underline{v}')$, $t(\underline{u}+\underline{u}',\underline{v})=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u}',\underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u},\underline{v})=\lambda t(\underline{u},\underline{v})=t(\underline{u},\lambda\underline{v})\quad\forall\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

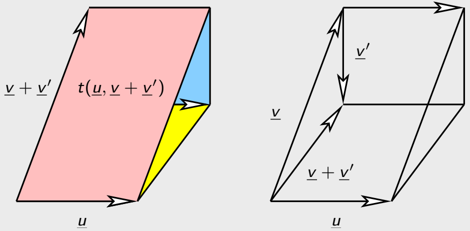
Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u},\underline{v})$ negatív is lehessen.

Konkrétan: $t(\underline{u},\underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson.

Megállapodhatunk abban, hogy $t(\underline{e}_1,\underline{e}_2)=1$ (és persze $t(\underline{e}_2,\underline{e}_1)=-1$).

Köv: $t(\underline{u},\underline{v})=-t(\underline{v},\underline{u})$.

Paralelogramma területe



Def: $t(\underline{u},\underline{v})$: az $\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma **előjeles** területe.

Megf: $t(\underline{u},\underline{v}+\underline{v}')=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u},\underline{v}')$, $t(\underline{u}+\underline{u}',\underline{v})=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u}',\underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u},\underline{v})=\lambda t(\underline{u},\underline{v})=t(\underline{u},\lambda\underline{v})\quad\forall\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u},\underline{v})$ negatív is lehessen.

Konkrétan: $t(\underline{u},\underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson.

Megállapodhatunk abban, hogy $t(\underline{e}_1,\underline{e}_2)=1$ (és persze $t(\underline{e}_2,\underline{e}_1)=-1$).

Köv: $t(\underline{u},\underline{v})=-t(\underline{v},\underline{u})$.

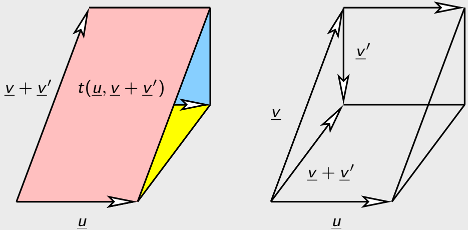
Hasonló igaz 3D-ben:

Ha $t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ a 3 vektor feszítette paralelepipedon előjeles térfogata, akkor pl

$t(\underline{u},\underline{v},\underline{w}+\underline{w}')=t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})+t(\underline{u},\underline{v},\underline{w}')$, $t(\lambda\underline{u},\underline{v},\underline{w})=\lambda t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$,

$t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})=-t(\underline{w},\underline{v},\underline{u})$ ill. $t(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)=1$.

Paralelogramma területe



Def: $t(\underline{u},\underline{v})$: az $\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2$ vektorok feszítette paralelogramma **előjeles** területe.
Megf: $t(\underline{u},\underline{v}+\underline{v}')=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u},\underline{v}')$, $t(\underline{u}+\underline{u}',\underline{v})=t(\underline{u},\underline{v})+t(\underline{u}',\underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u},\underline{v})=\lambda t(\underline{u},\underline{v})=t(\underline{u},\lambda\underline{v})\quad\forall\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.
Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u},\underline{v})$ negatív is lehessen.
Konkrétan: $t(\underline{u},\underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson.
Megállapodhatunk abban, hogy $t(\underline{e}_1,\underline{e}_2)=1$ (és persze $t(\underline{e}_2,\underline{e}_1)=-1$).
Köv: $t(\underline{u},\underline{v})=-t(\underline{v},\underline{u})$. Hasonló igaz 3D-ben:
Ha $t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ a 3 vektor feszítette paralelepipedon előjeles térfogata, akkor pl
$t(\underline{u},\underline{v},\underline{w}+\underline{w}')=t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})+t(\underline{u},\underline{v},\underline{w}')$, $t(\lambda\underline{u},\underline{v},\underline{w})=\lambda t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$,
$t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})=-t(\underline{w},\underline{v},\underline{u})$ ill. $t(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)=1$.
Megállapodás szerint $t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ akkor pozitív, ha $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ jobbsordású rendszer.

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix}$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= ab\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + bc \cdot (-1) + cd \cdot 0$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + bc \cdot (-1) + cd \cdot 0 = ad - bc$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Paralelepipedonra is elvégezhetünk egy hasonló számítást:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \ldots = aei \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + ahf \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + bdi \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+cdh \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + bfg \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + ceg \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Paralelepipedonra is elvégezhetünk egy hasonló számítást:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Paralelepipedonra is elvégezhetünk egy hasonló számítást:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Paralelepipedonra is elvégezhetünk egy hasonló számítást:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.

Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.

(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és

(2) a térfogat előjele attól függ, hogy a kockaélek felsorolása hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendből. (Minden csere egy-egy előjelváltást jelent.)

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Paralelepipedonra is elvégezhetünk egy hasonló számítást:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.

Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.

(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és

(2) a térfogat előjele attól függ, hogy a kockaélek felsorolása hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendből. (Minden csere egy-egy előjelváltást jelent.)

Kínzó kérdés: A (2)-beli előjeldefiníció vajon egyértelmű?

Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Paralelepipedonra is elvégezhetünk egy hasonló számítást:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.

Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.

(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és

(2) a térfogat előjele attól függ, hogy a kockaélek felsorolása hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendből. (Minden csere egy-egy előjelváltást jelent.)

Kínzó kérdés: A (2)-beli előjeldefiníció vajon egyértelmű?

Lehetséges vajon, hogy az egységvektorok valamely konkrét sorrendje páros sok és páratlan sok cserével is elérhető az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendből?

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$.

A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Paralelepipedonra is elvégezhetünk egy hasonló számítást:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.

Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.

(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és

(2) a térfogat előjele attól függ, hogy a kockaélek felsorolása hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendből. (Minden csere egy-egy előjelváltást jelent.)

Kínzó kérdés: A (2)-beli előjeldefiníció vajon egyértelmű?

Lehetséges vajon, hogy az egységvektorok valamely konkrét sorrendje páros sok és páratlan sok cserével is elérhető az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendből?

Megnyugtató válasz: Nem, ez nem lehetséges.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Példa: Az $(\underline{e}_3, \underline{e}_8, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_1, \underline{e}_6, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendhez az alábbi σ permutáció tartozik:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(i)$	5	7	1	8	3	6	4	2

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Példa: Az egységvektorok $(\underline{e}_3, \underline{e}_8, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_1, \underline{e}_6, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma
$I(\sigma) = 2 + 6 + 3 + 4 + 0 + 2 + 0 + 0 = 17$.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Biz: (1) A két felcserélt vektor viszonya megfordul, minden más pár ugyanolyan marad, mint korábban volt.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Biz:

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Biz: (2) Ha a felcserélt vektorok között k másik vektor van, akkor ugyanez a csere megkapható $2k + 1$ szomszédos vektorpár cseréjének egymásutánjaként. Az inverziószám így $(2k + 1)$-szer változik 1-gyel, ezért összességében páratlannal változik. $\square$

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ sorrendből.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ sorrendből.

Köv: Az egységvektorok σ permutációja által meghatározott egység-hiperkocka előjeles térfogata $(-1)^{I(\sigma)}$.

Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény bijekció, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekciót n elem permutációjának nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az $\{i, j\}$ pár inverzióban áll, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$-val jelölt inverziószáma a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ sorrendből.

Köv: Az egységvektorok σ permutációja által meghatározott egység-hiperkocka előjeles térfogata $(-1)^{I(\sigma)}$.

Kínzó kérdés: Hogyan határozható meg gyorsan ez az előjel?

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ az egységvektorok ezen sorrendjéhez tartozó permutáció.
Q: Mit jelent az, hogy egy $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ az egységvektorok ezen sorrendjéhez tartozó permutáció.

Q: Mit jelent az, hogy egy $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?

A: Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ az egységvektorok ezen sorrendjéhez tartozó permutáció.

Q: Mit jelent az, hogy egy $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?

A: Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll. Legyen σ az egységvektorok ezen sorrendjéhez tartozó permutáció.

Q: Mit jelent az, hogy egy $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?

A: Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van. Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.

Bástyaelhelyezések

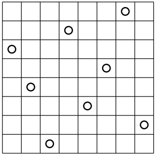
Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ az egységvektorok ezen sorrendjéhez tartozó permutáció.

Q: Mit jelent az, hogy egy $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?

A: Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.
Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

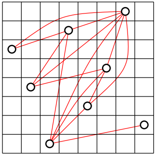
Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.

Példa:



Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.
Legyen σ az egységvektorok ezen sorrendjéhez tartozó permutáció.
Q: Mit jelent az, hogy egy $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?
A: Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.
Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.
Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.
Példa:



Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ az egységvektorok ezen sorrendjéhez tartozó permutáció.

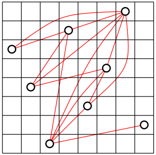
Q: Mit jelent az, hogy egy $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?

A: Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.

Példa:



$I(\sigma) = 14.$

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek bástyaelhelyezést alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ az egységvektorok ezen sorrendjéhez tartozó permutáció.

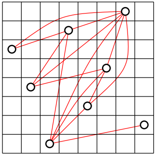
Q: Mit jelent az, hogy egy $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?

A: Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számaval.

Példa:



$I(\sigma) = 14.$ **Lássuk végre a determinánst!**

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Példa: $\begin{pmatrix} 42 & 4^2 & 4,2 \\ 42^{42} & 42! & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 42 & 42^{42} \\ 4^2 & 42! \\ 4,2 & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}$

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$ $= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Különös következmény: Bármely 3×3-as mátrixra igaz, hogy a sorai és oszlopai által feszített paralelepipedonok előjeles térfogatai megegyeznek.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| = = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek $A^\top$-ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A-ban, ha $A^\top$-ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért $\det(A)$-ban ugyanazokat a szorzatokat kell összeadni ugyazzal az előjellel, mint $\det(A^\top)$-ban. $\square$

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

A determináns

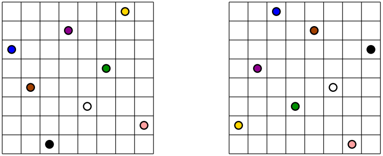
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Példa:



A determináns

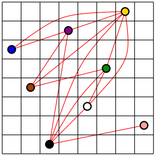
Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

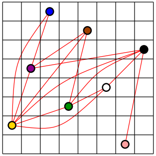
Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Példa:





A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$
$= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme.
A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| =$ $= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor hasonló tulajdonság teljesül a determináns soraira is.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix determinánsa $\det A = |A| = = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az i-dik sornak j-dik eleme. A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns kifejtési tagja.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.
(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.
(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az $A^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor hasonló tulajdonság teljesül a determináns soraira is.

Megj: Egy $n\times n$ determináns kiszámításához $n!$ kifejtési tagot kell összegezni. Ez rengeteg munka. Gyorsabb módszert kaphatunk, ha megfigyeljük, hogy az ESÁ-ok hogyan változtatják a determinánst.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{u}'_i \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}'_i, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}'_i, \dots, \underline{u}_n|,$

Ha az *i*-edik oszlop felbomlik két vektor összegére, akkor a determináns annak a két determinánsnak az összege, amelyikekben az *i*-edik oszlopot az egyes vektorokkal helyettesítjük.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,

Ha az i-edik oszlop felbomlik két vektor összegére, akkor a determináns annak a két determinánsnak az összege, amelyikekben az i-edik oszlopot az egyes vektorokkal helyettesítjük.

Biz: A bal oldali determináns minden kifejtési tagjában az i-dik oszlopbeli tényező a $\underline{u}_i$ és $\underline{u}_i'$ egy koordinátaösszege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai. $\square$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|,$$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{u}'_i \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}'_i, \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}'_i, \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
Az i-edik oszlopot λ-val végigszorozva a determináns is λ-szoros lesz.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
Az i-edik oszlopot λ-val végigszorozva a determináns is λ-szoros lesz.

Biz: A bal oldali determinánas minden kifejtési tagjából kiemelve λ-t épp a jobb oldalon szereplő determináns kifejtési tagjait kapjuk. $\square$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
Ha az i-edik oszlopban csak 0-k állnak, akkor a determináns is 0.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{u}'_i \in \mathbb{R}^n$, akkor (1) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}'_i, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}'_i, \dots, \underline{u}_n|$,

(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,

Ha az i-edik oszlopban csak 0-k állnak, akkor a determináns is 0.

Biz: Mivel $\underline{u}_i = \underline{0} = 0 \cdot \underline{u}_i$, ezért (2) miatt $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, 0 \cdot \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = 0 \cdot |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = 0$. $\square$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
Az i-edik és j-edik oszlop cseréjekor a determináns előjelet vált.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
Az i-edik és j-edik oszlop cseréjekor a determináns előjelet vált.

Biz: Minden kifejtési tagot úgy kapunk meg, hogy az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n$ vektorok mindegyikének kiválasztjuk egy-egy különböző koordinátáját, és ezeket összeszorozzuk. Ezért a két determináns kifejtési tagjaiban ugyanazok a szorzatok szerepelnek. Az ugyanazon szorzathoz tartozó kifejtési tagok egy oszlopcserével kaphatók egymásból. Az oszlopcsere két egységvektor felcserélésének felel meg a permutációban, ami által az inverziószám 1-gyel változik. Ezért az azonos szorzathoz tartozó kifejtési tagok abszolút értéke megegyezik, előjelük pedig egymással ellentétes. Összességében tehát a determináns értéke is (-1)-szeresre változik oszlopcsere hatására. $\square$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,

(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,

(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Biz: A két egyforma oszlopot felcserélve a mátrix nem változik, így a determimáns sem. (4) miatt viszont a determináns (-1)-szeres lesz, azaz $|A| = -|A|$, ahonnan $|A| = 0$ adódik. □

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

(1) Az előző állítás (2) részét alkalmazzuk az $A^\top$ transzponáltra.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

(2) Az előző állítás (4) részét alkalmazzuk az $A^\top$ transzponáltra.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \; \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz: (3) Az előző állítás (1) részét alkalmazva a transzponáltra a lecserélt sorú determináns megkapható $|A| + |A'|$ összegként, ahol A'-nek két egyforma sora van. A korábban látottak és az előző állítás (3) része miatt $|A'| = |(A')^\top| = 0$. □

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}'_i \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}'_i, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}'_i, \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

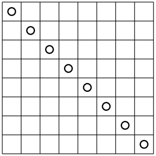
Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.



A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

?	?	?	?	?	?
0	?	?	?	?	?
0	0	?	?	?	?
0	0	0	?	?	?
0	0	0	0	?	?
0	0	0	0	0	?

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
Biz: Ha egy sor v1-e a főátlótól balra van, akkor a felette levő soré is. Az első soré nem ilyen, ezért minden v1 a főátlón vagy attól jobbra áll, így a főátló alatt minden elem 0.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i', \ldots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \ldots, \lambda\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_j, \ldots, \underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)
$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n|$,
(2) $|\underline{u}_1, \dots, \lambda\underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$,
(4) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|$.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:
(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.
(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.
(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

Biz: Minden kif.tag tartalmaz 0 tényezőt, kivéve a főátlóbeliek szorzata, aminek az előjele pozitív.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Az első sorból a másodikat kivonva a determináns nem változik.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Az első sort 2-szer ill. 1-szer kivonva a második ill. harmadik sorokból a determináns nem változik.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix}$$

A második és negyedik sort felcserévе a determináns előjelet vált.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

A második sort 2-szer ill. 6-szor kivonva a harmadik ill. negyedik sorokból a determináns nem változik.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

A harmadik sort -1-gyel végigszorozva a determináns előjelet vált.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix}$$

A harmadik sor 5-szörösét a negyedikhez adva a determináns nem változik.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-ket sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-ket sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni.
Sőt: mindent, amit a sorokkal megtehetünk, azt hasonló módon az oszlopokkal is elvégezhetjük. Ez néha célravezetőbb lehet, mint kizárólag csak ESÁ-ok alkalmazása.

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ oszlop- és $i-1$ sorcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ oszlop- és $i-1$ sorcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ 0 & \\ 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ oszlop- és $i-1$ sorcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ 0 & \\ 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & ????? \\ 0 & \\ \vdots & A_1 A_2 \\ & A_3 A_4 \\ 0 & \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ oszlop- és $i-1$ sorcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ 0 & & \\ 1 & ????? & \\ 0 & & \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1}\begin{vmatrix} 1 & ????? & \\ 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ oszlop- és $i-1$ sorcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ 0 & & \\ 1 & \multicolumn{2}{l}{?????} \\ 0 & & \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & \multicolumn{2}{l}{?????} \\ 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = A_{i,j}$$

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ oszlop- és $i-1$ sorcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} & 0 & \\ A_1 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \\ ??? & 1 & ??? \\ & 0 & \\ A_3 & \vdots & A_4 \\ & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ 0 & & \\ 1 & ????? & \\ 0 & & \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & ????? & \\ 0 & & \\ \vdots & A_1 & A_2 \\ \vdots & A_3 & A_4 \\ 0 & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = A_{i,j}$$

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

A fenti megfigyeléssel másképp is kiszámítható a detereminánás.

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \left| A_1, \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}, A_2 \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| A_1, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 \right| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \left| A_1, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 \right| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} \qquad \square$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):
$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminánsígy is kiszámítható.

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):
$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminánsígy is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminváns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminláns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):
$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminánás így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminláns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(9-11) + 14(3-1) - (6-2) + (9-11) - (6-22) = 4 + 28 - 4 - 2 + 16 = 42$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):
$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ $\square$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a deteremináns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & \color{red}{0} & 1 & 11 \\ 2 & \color{red}{2} & 1 & 2 \\ 1 & \color{red}{0} & 1 & 3 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{7} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & \color{red}{1} & 11 \\ 2 & \color{red}{1} & 2 \\ 1 & \color{red}{1} & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(9-11) + 14(3-1) - (6-2) + (9-11) - (6-22) = 4 + 28 - 4 - 2 + 16 = 42$$

Megf: A kifejtési tétel alkalmazásakor az egyes előjeles aldeterminánsokhoz tartozó előjel meghatározható sakktáblaszabállyal is:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra
- Determinánsszámítás ESÁ-okkal

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra
- Determinánsszámítás ESÁ-okkal
- Kifejtési tétel, sakktáblaszabály

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra
- Determinánsszámítás ESÁ-okkal
- Kifejtési tétel, sakktáblaszabály
- **A mai előadással lezárult a 2. ZH anyaga**

Mit tanultunk ma?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele
- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra
- Determinánsszámítás ESÁ-okkal
- Kifejtési tétel, sakktáblaszabály
- **A mai előadással lezárult a 2. ZH anyaga**

Köszönöm a figyelmet!