A számítástudomány alapjai

Altér bázisa és dimenziója

2024. november 12.

Hol tartunk?

- $\mathbb{R}^n$ altere és altér generátorrendszere

Hol tartunk?

- $\mathbb{R}^n$ altere és altér generátorrendszere
- Lin.ftn vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben

Hol tartunk?

- $\mathbb{R}^n$ altere és altér generátorrendszere
- Lin.ftn vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben
- Lin.ftn rendszer bővítése, generátorrendszer ritkítása

Hol tartunk?

- $\mathbb{R}^n$ altere és altér generátorrendszere
- Lin.ftn vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben
- Lin.ftn rendszer bővítése, generátorrendszer ritkítása
- Kicserélési tétel, FG-egyenlőtlenség

Hol tartunk?

- $\mathbb{R}^n$ altere és altér generátorrendszere
- Lin.ftn vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben
- Lin.ftn rendszer bővítése, generátorrendszer ritkítása
- Kicserélési tétel, FG-egyenlőtlenség
- Generált vektorok számítása, generált altér megadása és lineáris függetlenség eldöntése lineáris egyenletrendszer megoldásával

Hol tartunk?

- $\mathbb{R}^n$ altere és altér generátorrendszere
- Lin.ftn vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben
- Lin.ftn rendszer bővítése, generátorrendszer ritkítása
- Kicserélési tétel, FG-egyenlőtlenség
- Generált vektorok számítása, generált altér megadása és lineáris függetlenség eldöntése lineáris egyenletrendszer megoldásával

Hová tartunk?

Hol tartunk?

- $\mathbb{R}^n$ altere és altér generátorrendszere
- Lin.ftn vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben
- Lin.ftn rendszer bővítése, generátorrendszer ritkítása
- Kicserélési tétél, FG-egyenlőtlenség
- Generált vektorok számítása, generált altér megadása és lineáris függetlenség eldöntése lineáris egyenletrendszer megoldásával

Hová tartunk?
Az alterek struktúráját szeretnénk jobban megérteni.
Ebben segít a bázis fogalma. Ennek segítségével az derül ki, hogy az alterek nagyon hasonlítanak az $\mathbb{R}^n$ térhez.

Altér bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.

Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.

Altér bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.

Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.

Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V altérének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

Altér bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.

Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.

Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V altérének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. módszer: Ha ismert a V egy véges G generátorrendszere (azaz $V = \langle G \rangle$) akkor G-t addig ritkítjuk, míg lin.ftn-né válik: ha egy $\underline{g}$ generátorelem előáll $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek lin. komb.-jaként, akkor $\underline{g}$ eldobható, hisz $\langle G \setminus \{\underline{g}\} \rangle = V$. Ha elfogynak az eldobható vektorok, akkor G maradéka lin.ftn generátorrendszer.

Altér bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.

Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.

Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V altérének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. módszer: Ha ismert a V egy véges G generátorrendszere (azaz $V = \langle G \rangle$) akkor G-t addig ritkítjuk, míg lin.ftn-né válik: ha egy $\underline{g}$ generátorelem előáll $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek lin. komb.-jaként, akkor $\underline{g}$ eldobható, hisz $\langle G \setminus \{\underline{g}\} \rangle = V$. Ha elfogynak az eldobható vektorok, akkor G maradéka lin.ftn generátorrendszer.

2. módszer: Egy $F \subseteq V$ lin.ftn halmazt (pl. $F = \emptyset$-t) hízlalunk. Ha $\langle F \rangle = V$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$-re $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq n$, így legfeljebb n ilyen lépés után megkapjuk V egy bázisát.

Altér bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.

Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.

Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V altérének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. módszer: Ha ismert a V egy véges G generátorrendszere (azaz $V = \langle G \rangle$) akkor G-t addig ritkítjuk, míg lin.ftn-né válik: ha egy $\underline{g}$ generátorelem előáll $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek lin. komb.-jaként, akkor $\underline{g}$ eldobható, hisz $\langle G \setminus \{\underline{g}\} \rangle = V$. Ha elfogynak az eldobható vektorok, akkor G maradéka lin.ftn generátorrendszer.

2. módszer: Egy $F \subseteq V$ lin.ftn halmazt (pl. $F = \emptyset$-t) hízlalunk. Ha $\langle F \rangle = V$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$-re $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq n$, így legfeljebb n ilyen lépés után megkapjuk V egy bázisát.

Köv: Ha F ill. G lineárisan független halmaz ill. generátorrendszer a V altérben és $|F| = |G|$, akkor F és G is V bázisai.

Altér bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa a V egy lin.ftn generátorrendszere.

Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ standard bázisát alkotják.

Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V altérének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. módszer: Ha ismert a V egy véges G generátorrendszere (azaz $V = \langle G \rangle$) akkor G-t addig ritkítjuk, míg lin.ftn-né válik: ha egy $\underline{g}$ generátorelem előáll $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek lin. komb.-jaként, akkor $\underline{g}$ eldobható, hisz $\langle G \setminus \{\underline{g}\} \rangle = V$. Ha elfogynak az eldobható vektorok, akkor G maradéka lin.ftn generátorrendszer.

2. módszer: Egy $F \subseteq V$ lin.ftn halmazt (pl. $F = \emptyset$-t) hízlalunk. Ha $\langle F \rangle = V$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$-re $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq n$, így legfeljebb n ilyen lépés után megkapjuk V egy bázisát.

Köv: Ha F ill. G lineárisan független halmaz ill. generátorrendszer a V altérben és $|F| = |G|$, akkor F és G is V bázisai.

Biz: A 2. módszer szerint F bázissá egészíthető ki, az 1. módszer miatt G tartalmaz bázist. Az FG-egyenlőtlenség miatt ez a két bázis csakis F ill. G lehet.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez" hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez" hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez" hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A ,,lineáris függetlenség eldöntéséhez" hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez” hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez" hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez" hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez” hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \lambda & \mu & \kappa & \nu & \tau \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez” hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \lambda & \mu & \kappa & \nu & \tau \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} \kappa, \nu &\in \mathbb{R} \text{ tetsz} \\ \lambda &= \kappa - 3\nu \\ \mu &= 2\nu - \kappa \\ \tau &= 0 \end{aligned}$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez” hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} \lambda & \mu & \kappa & \nu & \tau \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \kappa, \nu \in \mathbb{R} \text{ tetsz} \\ \lambda = \kappa - 3\nu \\ \mu = 2\nu - \kappa \\ \tau = 0 \end{array}$$

Pl $\kappa = \nu = 1$ esetén
$\lambda = -2, \mu = 1$, és $\tau = 0$.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez” hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \lambda & \mu & \kappa & \nu & \tau \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \kappa, \nu \in \mathbb{R} \text{ tetsz} \\ \lambda = \kappa - 3\nu \\ \mu = 2\nu - \kappa \\ \tau = 0 \end{array}$$

Pl $\kappa = \nu = 1$ esetén
$\lambda = -2, \mu = 1$, és $\tau = 0$.

Ezért $-2\underline{u} + \underline{v} + \underline{w} + \underline{x} = \underline{0}$, azaz $\underline{w} = 2\underline{u} - \underline{v} - \underline{x}$, ezért $\underline{w}$ elhagynató a generátorrendszerből: $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{x}, \underline{y} \rangle$. Továbbritkítjuk a már megritkított generátorrendszert. Így a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda \underline{u} + \mu \underline{v} + \kappa \underline{x} + \nu \underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda \underline{u} + \mu \underline{v} + \kappa \underline{x} + \nu \underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda \underline{u} + \mu \underline{v} + \kappa \underline{x} + \nu \underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{rrrrr} \lambda & \mu & \kappa & \nu & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda & \mu & \kappa & \nu \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \kappa \in \mathbb{R} \text{ tetsz} \\ \lambda = -3\kappa \\ \mu = -2\kappa \\ \nu = 0 \end{array}$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda & \mu & \kappa & \nu \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \kappa \in \mathbb{R} \text{ tetsz} \\ \lambda = -3\kappa \\ \mu = -2\kappa \\ \nu = 0 \end{array}$$

Pl $\kappa = 1$ esetén
$\lambda = -3, \mu = 2$, és $\nu = 0$.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda & \mu & \kappa & \nu \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \kappa \in \mathbb{R} \text{ tetsz} \\ \lambda = -3\kappa \\ \mu = -2\kappa \\ \nu = 0 \end{array}$$

Pl $\kappa = 1$ esetén
$\lambda = -3, \mu = 2$, és $\nu = 0$.

Ezért $-3\underline{u} + 2\underline{v} + \underline{x} = \underline{0}$, azaz $\underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}$, ezért $\underline{x}$ elhagynató a generátorrendszerből: $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{y} \rangle$. Még tovább próbáljuk ritkítani a már alaposan megritkított generátorrendszert, ezért a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg.

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda \underline{u} + \mu \underline{v} + \kappa \underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \kappa \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \kappa \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = \kappa = 0$$

Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \kappa \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = \kappa = 0$$

Az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}$ vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja állítja elő a $\underline{0}$-t, ezért az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}$ vektorok lineárisan függetlenek. Láttuk, hogy $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{y} \rangle$, ezért $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$ a V altér egy olyan bázisa, amit a generátorrendszer ritkításával kaptunk. $\square$

Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) Megoldjuk az egyenletrendszert, és a megoldásokra nyert képlet segítségével találunk bázist.

Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

Példa: Keressük meg az alábbi $V \le \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) Megoldjuk az egyenletrendszert, és a megoldásokra nyert képlet segítségével találunk bázist.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) Megoldjuk az egyenletrendszert, és a megoldásokra nyert képlet segítségével találunk bázist.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) Megoldjuk az egyenletrendszert, és a megoldásokra nyert képlet segítségével találunk bázist.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) Megoldjuk az egyenletrendszert, és a megoldásokra nyert képlet segítségével találunk bázist.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}, \\ x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = \frac{2}{3}x_4. \end{array}$$

Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) Megoldjuk az egyenletrendszert, és a megoldásokra nyert képlet segítségével találunk bázist.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}, \\ x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = \frac{2}{3}x_4. \end{array}$$

A bázis elkészítéséhez a szp-ek olyan értékadásait keressük, amelyek lin.komb-jaként a szp-ek tetsz. értékadása előáll. Például ha minden lehetséges módon egy szp-nek 1, a többinek 0 értéket adunk, ilyet kapunk. Így az $x_3 = 1, x_4 = 0$ ill. $x_3 = 0, x_4 = 1$ értékadásokhoz a V altér

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ és } \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló bázisa tartozik. □

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Biz: Mivel B_1 lin.ftn és B_2 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_1| \leq |B_2|$.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Biz: Mivel B_1 lin.ftn és B_2 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_1| \leq |B_2|$.
Az is igaz, hogy B_2 lin.ftn és B_1 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_2| \leq |B_1|$ is teljesül.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.

Biz: Mivel B_1 lin.ftn és B_2 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_1| \leq |B_2|$.

Az is igaz, hogy B_2 lin.ftn és B_1 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_2| \leq |B_1|$ is teljesül.

A két eredmény összevetéséből $|B_1| = |B_2|$ adódik. $\square$

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n. (U.i. $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ lin.ftn gen.rsz.)

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.
Biz: Legyen B az U bázisa. Ekkor $B \subseteq V$ lin.ftn, ezért a korábban látott 2. módszerrel B-t ki lehet egészíteni V egy B' bázisává, így $\dim U = |B| \leq |B'| = \dim V$. $\square$

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.
Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq \dim V_1 + \dim V_2$.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.
Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq \dim V_1 + \dim V_2$.
Biz: Egészítsük ki az $U \cap V$ egy B bázisát a V_1 egy $B \cup B_1$ ill. a V_2 egy $B \cup B_2$ bázisává. Igazoljuk, hogy $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Tfh $\sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{0}$. Ezt átrendezve: $V_1 \ni \underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 = -\sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 \in V_2$ adódik, ezért $\underline{x} \in V_1 \cap V_2$. Ekkor $\underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, hisz B a $V_1 \cap V_2$ bázisa. Innen $\sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{x} - \underline{x} = \underline{0}$. A $B \cup B_2$ lin.ftn-sége miatt $\lambda_{\underline{b}_2} = 0\ \forall \underline{b}_2 \in B_2$. Hasonlóan $\lambda_{\underline{b}_1} = 0\ \forall \underline{b}_1 \in B_1$, és $\lambda_{\underline{b}} = 0\ \forall \underline{b} \in B$, azaz $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Ebből adódik, hogy $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq |B| + |B_1| + |B_2| + |B| = \dim V_1 + \dim V_2$. $\square$

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.
Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq \dim V_1 + \dim V_2$.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.
Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq \dim V_1 + \dim V_2$.
Köv: $\mathbb{R}^3$-ban bármely két origón áthaladó sík (más szóval: kétdimenziós altér) tartalmaz közös egyenest.
Megj: $\mathbb{R}^4$-ben már található két olyan origón áthaladó sík, amik csak az origóban metszik egymást. Ilyenek pl. $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$ ill. $\langle \underline{e}_3, \underline{e}_4 \rangle$.

Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.
Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér dimenziója $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.
Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.
Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n.
Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.
Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq \dim V_1 + \dim V_2$.
Köv: $\mathbb{R}^3$-ban bármely két origón áthaladó sík (más szóval: kétdimenziós altér) tartalmaz közös egyenest.
Megj: $\mathbb{R}^4$-ben már található két olyan origón áthaladó sík, amik csak az origóban metszik egymást. Ilyenek pl. $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$ ill. $\langle \underline{e}_3, \underline{e}_4 \rangle$.

A továbbiakban azt fogjuk megmutatni, hogy $\mathbb{R}^n$ tetszőleges k dimenziós altere ,,lényegében'' úgy viselkedik, mint $\mathbb{R}^k$.

Bázis szerinti koordináták

Legyen B a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa. Mivel B generátorrendszer, minden $\underline{v} \in V$ előáll a B elemeinek lin.komb-jaként, azaz $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b}$ alakban.

Bázis szerinti koordináták

Legyen B a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa. Mivel B generátorrendszer, minden $\underline{v} \in V$ előáll a B elemeinek lin.komb-jaként, azaz $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b}$ alakban.
A B bázis lin.ftn-ségéből pedig az következik, hogy tetszőleges $\underline{v} \in V$ lin.komb-ként történő előállítása egyértelmű: ha $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, akkor $\lambda_{\underline{b}} = \mu_{\underline{b}}$ $\forall \underline{b} \in B$.

Bázis szerinti koordináták

Legyen B a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa. Mivel B generátorrendszer, minden $\underline{v} \in V$ előáll a B elemeinek lin.komb-jaként, azaz $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b}$ alakban.
A B bázis lin.ftn-ségéből pedig az következik, hogy tetszőleges $\underline{v} \in V$ lin.komb-ként történő előállítása egyértelmű: ha $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, akkor $\lambda_{\underline{b}} = \mu_{\underline{b}}$ $\forall \underline{b} \in B$.
Ez a gondolatmenet indokolja az alábbi fogalom jóldefiniáltságát.
Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor *B bázis szerinti koordinátavektora*
$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$
Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Biz: (1) Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$.

Ekkor $\underline{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$ és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i$, tehát $\underline{u} + \underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) \underline{b}_i$, ezért

$$[\underline{u} + \underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_k + \mu_k \end{pmatrix} = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B \ .$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora
$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$
Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Biz:

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora
$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$
Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Biz: (2) Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Ekkor

$$\lambda \underline{u} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k \lambda \lambda_i \underline{b}_i \Rightarrow [\lambda \underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda\lambda_k \end{pmatrix} = \lambda [\underline{u}]_B \quad \square$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor *B* bázis szerinti koordinátavektora $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Megj: A fenti állítás azt mutatja meg, hogy $\mathbb{R}^n$ bármely V altere lényegében ugyanúgy viselkedik, mint az $\mathbb{R}^k$ tér, ahol $k = \dim V$.

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Kínzó kérdés: Hogy lehet a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \le \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor *B bázis szerinti koordinátavektora*
$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$
Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.
Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.
Kínzó kérdés: Hogy lehet a koordinátavektort kiszámítani?
Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \le \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol
$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.
Módszer: A generált vektor számítására tanult eljárást követjük: megoldjuk a $\lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 = \underline{v}$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert. A kibővített együtthatómátrix:

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Kínzó kérdés: Hogy lehet a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Módszer: A generált vektor számítására tanult eljárást követjük: megoldjuk a $\lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 = \underline{v}$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert. A kibővített együtthatómátrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor *B bázis szerinti koordinátavektora*
$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Kínzó kérdés: Hogy lehet a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol
$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Módszer: A generált vektor számítására tanult eljárást követjük: megoldjuk a $\lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 = \underline{v}$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert. A kibővített együtthatómátrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor *B bázis szerinti koordinátavektora*
$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$
Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Kínzó kérdés: Hogy lehet a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Módszer: A generált vektor számítására tanult eljárást követjük: megoldjuk a $\lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 = \underline{v}$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert. A kibővített együtthatómátrix:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Kínzó kérdés: Hogy lehet a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Módszer: A generált vektor számítására tanult eljárást követjük: megoldjuk a $\lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 = \underline{v}$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert. A kibővített együtthatómátrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor *B bázis szerinti koordinátavektora*
$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$
Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Kínzó kérdés: Hogy lehet a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Módszer: A generált vektor számítására tanult eljárást követjük: megoldjuk a $\lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 = \underline{v}$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert. A kibővített együtthatómátrix:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} \lambda_1 = & -3 \\ \lambda_2 = & 4 \end{array}$$

Bázis szerinti koordináták

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor B bázis szerinti koordinátavektora

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Kínzó kérdés: Hogy lehet a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol

$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Módszer: A generált vektor számítására tanult eljárást követjük: megoldjuk a $\lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 = \underline{v}$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert. A kibővített együtthatómátrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} \lambda_1 = & -3 \\ \lambda_2 = & 4 \end{array}$$

Ezek szerint $\underline{v} = -3\underline{b}_1 + 4\underline{b}_2$, azaz $\underline{v} \in V$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\square$

Disclaimer

A mai tananyag számonkért része itt véget ér. A továbbiakban extrák következnek az érdeklődők számára ill. az érdeklődés felkeltésére, amit a korábban elmondottaknak megfelelően nem kérünk számon.

Disclaimer

A mai tananyag számonkért része itt véget ér. A továbbiakban extrák következnek az érdeklődők számára ill. az érdeklődés felkeltésére, amit a korábban elmondottaknak megfelelően nem kérünk számon.

Annak ellenére, hogy minden itt következő ismeretet a szokásos módon bebizonyítunk, ezeket nem tekintjük az órán elhangzottnak, vagyis olyannak, ami (például a ZH-n) korlátozás nélkül felhasználható. Nem tilos természetesen erre támaszkodni egy feladat megoldása során, de ilyenkor minden felhasznált tételt ill. módszer helyességét igazolni kell.

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\color{red}{1} & & & & & & ? & & & & & \\
 & & \color{red}{1} & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & \color{red}{1} & & ? & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & \color{red}{1} & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & \color{red}{1} & \\
 & & & & & & 0 & & & & &
\end{array}\right)$$

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$
M = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
{\color{red}1} & & & & & & ? & & & & & \\
 & & {\color{red}1} & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & {\color{red}1} & & ? & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & {\color{red}1} & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & {\color{red}1} & \\
 & & & & & & 0 & & & & &
\end{array}\right)
$$

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha úgy kapható az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával, hogy minden beszúrt oszlop a tőle balra álló $\underline{e}_i$ oszlopok lineáris kombinációja.

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
1 & & & & & & ? & & & & & \\
 & & 1 & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & 1 & & ? & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & 1 & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & 1 & \\
 & & & & & & 0 & & & & &
\end{array}\right)$$

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha úgy kapható az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával, hogy minden beszúrt oszlop a tőle balra álló $\underline{e}_i$ oszlopok lineáris kombinációja.

Biz: Tfh M RLA. Ekkor vezéregyesek oszlopai a standard bázis $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ egységvektorai. Minden vezéregyest nem tartalmazó oszlop minden nemnulla elemétől balra van a nemnulla elem sorában vezéregyes. Ezen vezéregyesek oszlopainak alkalmas lineáris kombinációjaként előáll a vezéregyest nem tartalmazó oszlop. Az M mátrix tehát előállítható a megfigyelésben leírt módon.

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\color{red}{1} & & & & & & ? & & & & & \\
& & \color{red}{1} & & & & \vdots & & & & & \\
& & & & \color{red}{1} & & ? & & & & & \\
\hline
& & & & & & 0 & & \color{red}{1} & & & \\
& & & & & & \vdots & & & & \color{red}{1} & \\
& & & & & & 0 & & & & &
\end{array}\right)$$

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha úgy kapható az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával, hogy minden beszúrt oszlop a tőle balra álló $\underline{e}_i$ oszlopok lineáris kombinációja.

Biz:

RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
1 & & & & & & ? & & & & & \\
 & & 1 & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & 1 & & ? & & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & 1 & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & 1 & \\
 & & & & & & 0 & & & & &
\end{array}\right)$$

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha úgy kapható az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával, hogy minden beszúrt oszlop a tőle balra álló $\underline{e}_i$ oszlopok lineáris kombinációja.

Biz: Most tfh M az $(\underline{e}_1 | \ldots | \underline{e}_k)$ mátrixból keletkezik a megfigyelésben leírt módon történő oszlopbeszúrásokkal. Ekkor a vezéregyesek pontosan az $\underline{e}_i$ vektorok egyesei lesznek. Ezért minden vezéregyes feletti sorban áll a vezéregyestől balra másik vezéregyes, és a vezéregyesek felett is csak 0-k állnak, tehát M RLA.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Biz: Feltehető, hogy M'-t egyetlen ESÁ-sal kaptuk M-ből. Bármelyik konkrét ESÁ-t is alkalmaztuk, az újonnan megjelenő sor a korábbi sorok lineáris kombinációja, így benne van az $\langle S\rangle$ altérben. Ezért $S' \subseteq \langle S\rangle$, így $\langle S'\rangle \subseteq \langle S\rangle$. Láttuk, hogy bármely ESÁ megfordítása is kivitelezhető ESÁ-okkal, ezért $\langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle$ is teljesül. E két megfigyelésből pedig $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$ adódik. $\square$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i) \qquad \iff \qquad (\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i).$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \qquad \iff \qquad \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Biz:

Ismét feltehető, hogy M' egyetlen ESÁ-sal keletkezett. Ráadásul elég a $\Rightarrow$: irányt bizonyítani: a $\Leftarrow$: következik abból, hogy minden ESÁ fordítottja megvalósítható legfeljebb három ESÁ-sal. Ezért ha egy lin.összefüggés fennál M'-re akkor az ezt legfeljebb három ESÁ megőrzi, tehát igaz marad M-re is.

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \qquad \iff \qquad \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Biz:

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \qquad \iff \qquad \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Biz:

$\Rightarrow$: A bal oldali összefüggés azt jelenti, hogy M minden sora megoldja a $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$ egyenletet, azaz M bármely sorának első elemét x_1, a másodikat x_2, stb helyébe helyettesítve fennáll az egyenlőség. A jobb oldali összefüggés igazolásához ugyanezt kell megmutatni M' sorairól. Sorcsere esetén pontosan ugyanazokról az egyenlőségekről van szó, skalárral szorzás esetén az egyik egyenletet skalárral kell végig szorozni, sorösszeadás esetén pedig az új egyenlőség két korábban teljesülő egyenlet összege. $\square$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \qquad \iff \qquad \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \ldots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \ldots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \qquad \iff \qquad \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}_1', \dots \underline{o}_k'\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i' = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i'\right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \iff \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Példa: Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A kapott RLA mátrixra $\underline{o}'_4 = -7\underline{o}'_1 + 3\underline{o}'_2 + 2\underline{o}'_3$. Így M oszlopaira is fennáll az $\underline{o}_4 = -7\underline{o}_1 + 3\underline{o}_2 + 2\underline{o}_3$ összefüggés, azaz M egy oszlopa előáll a többi oszlop lineáris kombinációjaként. Tehát M oszlopai nem lin. ftn.-ek.

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:
Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:
Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\\-2\end{pmatrix},\ \underline{x}=\begin{pmatrix}5\\-9\\2\\5\end{pmatrix},\ \underline{y}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\3\end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix}3&2&-1&5&2\\-1&3&4&-9&2\\0&-1&-1&2&2\\1&-1&-2&5&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-2&5&3\\-1&3&4&-9&2\\0&-1&-1&2&2\\3&2&-1&5&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-2&5&3\\0&2&2&-4&5\\0&-1&-1&2&2\\0&5&5&-10&-7\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&-2&5&3\\0&-1&-1&2&2\\0&2&2&-4&5\\0&5&5&-10&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-2&5&3\\0&1&1&-2&-2\\0&2&2&-4&5\\0&5&5&-10&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&3&1\\0&1&1&-2&-2\\0&0&0&0&9\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\underline{u}&\underline{v}&\underline{w}&\underline{x}&\underline{y}\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&-1&3&0\\0&1&1&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

Ezért $\underline{w}=\underline{v}-\underline{u}$, $\underline{x}=3\underline{u}-2\underline{v}$, azaz $\underline{w},\underline{x}\in\langle\underline{u},\underline{v},\underline{y}\rangle$.
Tehát $\{\underline{u},\underline{v},\underline{y}\}$ a V generátorrendszere.
Másrészt $\{\underline{u},\underline{v},\underline{y}\}=\{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3\}$ lineárisan független.
Konklúzió: $\{\underline{u},\underline{v},\underline{y}\}$ a V altér egy bázisa. $\square$

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol
$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1|\underline{b}_2|\underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol
$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1|\underline{b}_2|\underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1 | \underline{b}_2 | \underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1|\underline{b}_2|\underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'$$

Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol
$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1|\underline{b}_2|\underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'$$

Az M' RLA mx $\underline{o}_1', \underline{o}_2', \underline{o}_3'$ oszlopaira teljesül, hogy $\underline{o}_3' = -3\underline{o}_1' + 4\underline{o}_2'$.
Az ESÁ-ok oszlopokra gyakorolt hatásáról látottak szerint $\underline{v} = -3\underline{b}_1 + 4\underline{b}_2$.

Tehát $\underline{v} \in V$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\square$

Mi haszna a lineáris algebrának???

Mi haszna a lineáris algebrának???

Amiről itt és most nem esik szó: koordinátageometria, konvex alakzatok geometriája ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldása. Ezek mindegyike fontos alkalmazási terület.

A matematikailag különösen érdekes alkalmazások általában abból fakadnak, hogy egy lineáris algebrától látszólag távol álló feladatról derül ki, hogy megfogalmazható lineáris algebrai terminológiával. Az ezen kapcsolat révén rendelkezésre álló eszközök pedig jóval hatékonyabbak lehetnek, mint az eredeti feladat témakörében szokásosak. Akár a legegyszerűbb linalg. eszköz is (mint amilyen pl. az FG-egyenlőtlenség) alkalmas lehet nehéz tételek meglepően egyszerű igazolására.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Amiről itt és most nem esik szó: koordinátageometria, konvex alakzatok geometriája ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldása. Ezek mindegyike fontos alkalmazási terület.
A matematikailag különösen érdekes alkalmazások általában abból fakadnak, hogy egy lineáris algebrától látszólag távol álló feladatról derül ki, hogy megfogalmazható lineáris algebrai terminológiával. Az ezen kapcsolat révén rendelkezésre álló eszközök pedig jóval hatékonyabbak lehetnek, mint az eredeti feladat témakörében szokásosak. Akár a legegyszerűbb linalg. eszköz is (mint amilyen pl. az FG-egyenlőtlenség) alkalmas lehet nehéz tételek meglepően egyszerű igazolására.

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz:

(1) Ha $\lambda = 0$, akkor az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok diszjunktak. Ekkor az állítás triviális, hisz $|A_i| \geq 1 \ \forall i$. Ezért feltehető, hogy $\lambda > 0$.

(2) Világos, hogy $|A_i| \geq \lambda \ \forall 1 \leq i \leq k$. Ha mondjuk $|A_1| = \lambda$, akkor $A_1 \subseteq A_j \ \forall j \neq 1$. Ezért az $A_2, \ldots A_n$ halmazok A_1-en kívüli része egymástól diszjunkt, így a darabszámuk legfeljebb $n - \lambda$. Ebből pedig $k \leq n - \lambda + 1 \leq n$ adódik.

Ezért mostantól feltesszük, hogy $|A_i| > \lambda$ teljesül az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok mindegyikére.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz:

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \; \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz:

(3) Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \; \forall 1 \leq i \leq k$.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz:

(3) Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \ \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } \chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda\ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz:

(3) Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0\ \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } \chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tfh $\lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektorok A_j elemeinek megfelelő koordinátáinak összegére $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ adódik.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz:

(3) Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \ \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } \chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tfh $\lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektorok A_j elemeinek megfelelő koordinátáinak összegére $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ adódik.

Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, akkor $\lambda_j < 0 \ \forall j$, így $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, ellentmondás.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz:

(3) Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \ \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ az $A_1, \dots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } \chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tfh $\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektorok A_j elemeinek megfelelő koordinátáinak összegére $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ adódik.

Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, akkor $\lambda_j < 0 \ \forall j$, így $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, ellentmondás.

Ha pedig $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, akkor $\lambda_j > 0 \ \forall j$, így ez sem lehetséges.

Mi haszna a lineáris algebrának???

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda \ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz:

(3) Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0 \ \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}, \text{ ahol } \chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tfh $\lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektorok A_j elemeinek megfelelő koordinátáinak összegére $\mu_j \lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ adódik.

Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, akkor $\lambda_j < 0 \ \forall j$, így $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, ellentmondás.

Ha pedig $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, akkor $\lambda_j > 0 \ \forall j$, így ez sem lehetséges.

Végül, ha ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$, akkor $\lambda_j = 0 \ \forall j$. Ezért az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok csakugyan lin.ftn-ek. $\square$

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén
- Altér dimenziója

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén
- Altér dimenziója
- Bázis segítségével minden altér koordinátázható

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén
- Altér dimenziója
- Bázis segítségével minden altér koordinátázható
- Koordinátavektor, és előállítása lin. egyenletrendszerből

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén
- Altér dimenziója
- Bázis segítségével minden altér koordinátázható
- Koordinátavektor, és előállítása lin. egyenletrendszerből
- RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén
- Altér dimenziója
- Bázis segítségével minden altér koordinátázható
- Koordinátavektor, és előállítása lin. egyenletrendszerből
- RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága
- ESÁ hatása a mátrix soraira és oszlopaira

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén
- Altér dimenziója
- Bázis segítségével minden altér koordinátázható
- Koordinátavektor, és előállítása lin. egyenletrendszerből
- RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága
- ESÁ hatása a mátrix soraira és oszlopaira
- Lin. ftnség eldöntése, bázis és koordinátavektor számítása varázslással

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén
- Altér dimenziója
- Bázis segítségével minden altér koordinátázható
- Koordinátavektor, és előállítása lin. egyenletrendszerből
- RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága
- ESÁ hatása a mátrix soraira és oszlopaira
- Lin. ftnség eldöntése, bázis és koordinátavektor számítása varázslással
- Egészen fura célokra is használható a linalgebra

Mit tanultunk ma?

- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén
- Altér dimenziója
- Bázis segítségével minden altér koordinátázható
- Koordinátavektor, és előállítása lin. egyenletrendszerből
- RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága
- ESÁ hatása a mátrix soraira és oszlopaira
- Lin. ftnség eldöntése, bázis és koordinátavektor számítása varázslással
- Egészen fura célokra is használható a linalgebra

Köszönöm a figyelmet!