

Bevezetés a számításelméletbe II.

11. gyakorlat 2003. április 25.

Elem rendje, ciklikus csoport, részcsoporthat, Lagrange-tétel, izomorfia

1. Ciklikus csoport-e az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz a modulo 7 szorzással?
2. (a) Hány eleme van a D_5 diédercsoportnak? (A D_n diéder csoport alatt a szabályos n szög egybevágósági transzformációiból alkotott csoportot értjük.)
(b) Abel-csoportról van-e szó?
(c) Ciklikus-e a csoport?
(d) Van-e D_5 -nek olyan részcsoporthatja, amelyik izomorf a modulo k összeadás csoportjával a $k = 2, 3, 5, 10$ esetekben?
3. Mutassuk meg, hogy minden prímszámú csoport ciklikus is!
4. Mutassuk meg, hogy minden ciklikus csoport kommutatív is!
5. (a) Egy G csoportnak az e egységtől különböző a, b, c elemeire $a^3 = b^5 = c^7 = e$. Bizonyítsuk be, hogy $|G| > 100$.
(b) Mi a helyzet, ha azt tudjuk, hogy a három elem az egységtől különbözik és $a^{12} = b^5 = c^7 = e$?
6. Legyen a és b egy csoport két tetszőleges eleme. Bizonyítsuk be, hogy ekkor b rendje megegyezik $a^{-1}ba$ rendjével.
7. **HF** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n > 0$ számhoz található olyan véges csoport, melynek rendje pontosan n ? És ciklikus csoport?
8. **HF** Legyen $n \geq 4$. Az n hosszú 0-1 sorozatok H_1 halmazán jelölje $+$ a bitenkénti modulo 2 összeadást. Álljon H_2 azokból a sorozatokból, melyekben az egyesek száma kettővel osztható. H_3 pedig azokból, melyekben az egyesek száma osztható hárommal. Mutassuk meg, hogy az előbb definiált művelettel H_1 csoportot alkot! Részcsoporthat-e H_2 illetve H_3 ?
9. **HF** Bizonyítsuk be, hogy egy csoport nem állhat elő két valódi részcsoporthatjának uniójaként! (Egy részcsoporthat *valódi*, ha nem tartalmazza a csoport összes elemét.)
10. **HF** Legyen G egy 2001 rendű csoport és $g \in G$ egy 23-rendű eleme. Határozzuk meg g^2 rendjét!
11. **HF** Legyen G egy kommutatív csoport és az a, b elemek rendje $o(a) = n$ illetve $o(b) = k$. Bizonyítsuk be, hogy $o(ab)$ osztja az n és k legkisebb közös többszörösét.
12. **HF** A kocka szimmetria csoportjának (azaz egybevágósági transzformációiból alkotott csoportjának) mekkora a legnagyobb rendű részcsoporthatja, amely részcsoporthat marad,
(a) ha egy lapot kékre festünk;
(b) ha két párhuzamos lapot kékre festünk?
(1. megjegyzés: tehát csak a kék részt kékbe vivő transzformációk fordulhatnak elő részcsoporthatokban.)