

Bevezetés a számításelméletbe II.

1. gyakorlat 2003. február 13.

Euler- és Hamilton-körök

1. Mely n -re létezik az n -pontú teljes gráfnak Hamilton-köre, Hamilton-útja, Euler-köre illetve Euler-útja?
2. Minimálisan hányszor kell felemelni a ceruzánkat, hogy a Petersen-gráfot lerajzoljuk úgy, hogy minden élen teljes hosszában pontosan egyszer haladjunk végig?
3. Bizonyítsuk be, hogy egy 6-reguláris gráf élei irányíthatóak úgy, hogy minden pont kifoka és befoka is 3 legyen.
4. Van-e Hamilton-kör vagy -út az alábbi gráfokban?

5. Az n -pontú K_n teljes gráfból elhagytuk egy feszítőfa éleit, majd visszarakunk két élet. Mutassuk meg, hogy az így nyert gráfban van Hamilton-kör.
6. Az n és k számokhoz tartozó $G_{n,k}$ Kneser-gráf pontjai egy n -elemű halmaz k -elemű részhalmazainak felelnek meg és két pont között pontosan akkor van él, ha a pontoknak megfelelő részhalmazok diszjunktak. Van-e Hamilton-kör
 - (a) $G_{6,3}$ -ban, illetve
 - (b) $G_{16,3}$ -ban?
7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő G gráf egy K köréből egy élt törölve G egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K a gráf Hamilton-köre!
8. **HF** Hány Hamilton-kört tartalmaz az n -pontú teljes gráf?
9. **HF** Egy gráf minden pontjának foka páros. Bizonyítsuk be, hogy a gráf minden vágása páros sok élet tartalmaz.
10. **HF** Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?
 - (a) Ha egy összefüggő gráfban létezik Euler-út, és hozzáveszünk kört alkotó éleket, akkor az így nyert gráfban is létezik Euler-út.
 - (b) Ha egy gráfban létezik Euler-kör, és a gráf egy körének éleit töröljük, akkor az így nyert gráfban is létezik Euler-kör.
11. **HF** A G_n egyszerű gráf csúcsait feleltessük meg az n -hosszú 0-1 bitsorozatoknak. Mely $n \geq 3$ esetén tartalmaz Euler-kört, illetve Hamilton-kört G_n , amelyben két csúcs között pontosan abban az esetben fut él, ha
 - (a) a megfelelő bitsorozatok pontosan egy bitben térnek el egymástól;
 - (b) a megfelelő bitsorozatok pontosan két bitben térnek el egymástól;
 - (c) a megfelelő bitsorozatok legalább két bitben térnek el egymástól?
12. **HF** Igazoljuk, hogy egy tetszőleges összefüggő gráf élei bejárhatóak úgy, hogy minden élen pontosan kétszer haladjunk végig.
13. **HF** (*) Mutassuk meg, hogy egy teljes gráf éleit bárhogyan irányítjuk, az irányítások révén nyert gráfban lesz irányított Hamilton-út!