Bevezetés a számításelméletbe

7. gyakorlat 2002, október 21.

Inverz, rang

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ -3 & -7 & -12 \end{pmatrix}$$

2. Legyen A egy $n \times n$-es invertálható mátrix, B pedig egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $AB = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor $B = 0$.

3. Igaz-e, hogy ha az $n \times n$ méretű A és B mátrixoknak létezik inverze, akkor AB-nek is létezik?

4. Mennyi az alábbi mátrixok rangja?
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Egy egyenest, egy síkot vagy az egész teret generálja az alábbi vektorrendszer?
$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

6. (a) Bizonyítsuk be, hogy egy mátrix egy tetszőleges elemét megváltoztatva a rang legfeljebb eggyel változik!

   (b) Igaz-e, hogy bármely 20×6 méretű 5 rangú mátrixban létezik olyan elem, amelyet alkalmasan módosítva a mátrix rangja csökken?

7. **HF** Határozzuk meg x minden értékére az alábbi mátrix rangját! Milyen x-ek esetén lesz a mátrix sorvektorainak rendszere lineárisan független? És az oszlopvektorok rendszere? M ilyen x-ek esetén invertálható a mátrix?
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}$$

8. **HF** Bizonyítsuk be, hogy ha egy $n \times n$-es A mátrixban a főátló alatt álló összes elem nulla (vagyis A háromszögmátrix), akkor ugyanez igaz A minden pozitív egész kitevőjű A^n hatványára is.

9. **HF** Bizonyítsuk be, hogy egy $k \times n$-es mátrixnak akkor és csak akkor 1 a rangja, ha felírható egy oszlop- és egy sorvektor (azaz egy $k \times 1$ és egy $1 \times n$ méretű mátrix) szorzataként!

10. **HF** Az $n \times n$-es A és B mátrixokra teljesül, hogy $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$.