Bevezetés a számításelméletbe II.

14. gyakorlat, 2007. május 16.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Gyűrűk, testek

138. Állapítsuk meg, hogy az alábbi struktúrák közül melyik gyűrű. Ha gyűrű, akkor döntsük el, hogy kommutatív, egységelemes illetve nullosztómentes-e. (Ha kommutatív és nullosztómentes, akkor integritási tartománynak hívjuk.) Továbbá ha egységelemes és nullosztómentes is, akkor nézzük meg, hogy ferdetestről, esetleg testről van-e szó.

    (a) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$;

    (b) az egész együtthatós polinomok;

    (c) $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ a modulo n összeadással és szorzással;

    (d) a 4×4-es mátrixok;

    (e) a 4×4-es mátrixok, melyek determinánsa nem nulla, valamint a 4×4-es nulla mátrix;

    (f) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a szokásos összeadással és szorzással;

    (g) A páros számok (általában az m-mel osztható egész számok) a szokásos összeadással és szorzással;

    (h) Az $n \times n$-es mátrixok $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ felett a szokásos mátrixösszeadással és mátrixszorzással;

    (i) A polinomok $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ felett a szokásos polinomösszeadással és polinomszorzással;

    (j) Egy H halmaz részhalmazai, az unió és a metszet műveletekkel;

    (k) Egy H halmaz részhalmazai, a szimmetrikus differencia és a metszet műveletekkel;

    (l) Az adott intervallumon értelmezett folytonos függvények, a képeken végrehajtott összeadással és szorzással;

    (m) A valós számpárok, az elemenkénti összeadással és szorzással.

139. Egy $x \neq 0$ gyűrűelem baloldali nullosztó, ha $\exists y \neq 0$, hogy $xy = 0$. Legyen x_1 és x_2 baloldali nullosztó. Bizonyítsuk be, hogy x_1x_2 is baloldali nullosztó, de $x_1 + x_2$ nem feltétlenül az!

140. Adjunk példát az $n \times n$-es mátrixok gyűrűjében nullosztókra!

141. Bizonyítsuk be, hogy kommutatív testben minden elemnek legfeljebb két négyzetgyöke lehet.

142. Legyen az R gyűrűben 0 az additív neutrális elem.

    (a) Lássuk be, hogy tetszőleges a elemre $0a = a0 = 0$;

    (b) Azt is lássuk be, hogy tetszőleges a, b elemekre $(-a)b = -ab$.

143. A az R gyűrű azon elemeiből áll, amelyekre $a * r = r * a$, minden $r \in R$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy A részgyűrűje R-nek.

144. Legyen R egy egységelemes integritási tartomány, és r egy eleme, amelyre $r * r = r$. Lássuk be, hogy ekkor $r = 0$ vagy $r = 1$.