

Bevezetés a számításelméletbe II.

11. gyakorlat, 2007. április 25.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Csoportok II.

117. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számhoz található n elemű csoport, és hogy végtelen sok n -re teljesül, hogy az n elemű csoportok izomorfak.
118. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész szám esetén létezik olyan csoport, amelynek pontosan k darab részcsoportja van!
119. A G csoport a , b és c elemei különböznek az e egységtől és $a^3 = b^5 = c^7 = e$. Lássuk be, hogy G -nek legalább 100 eleme van.
120. Hány részcsoportja van a 15 rendű ciklikus csoportnak?
121. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész szám esetén létezik olyan csoport, amelynek pontosan k darab részcsoportja van!
122. Egy csoport rendje 81 és van olyan eleme, melynek 27. hatványa nem az egységelem. Bizonyítsuk be, hogy a csoport kommutatív.
123. Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport rendje 55, akkor minden $a \in G$ elemére teljesül, hogy az a és a^8 elemek rendje azonos.
124. Tekintsünk egy páratlan rendű Abel-csoportot, melyben a műveletet összeadásnak nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy az összes elem összege 0.
125. Igaz-e az alábbi két állítás?
- (a) Ha egy tetszőleges véges G csoportban van 2 rendű elem, akkor G rendje páros.
 - (b) Ha egy tetszőleges véges G csoport rendje páros, akkor G -ben van 2 rendű elem.
126. Írjuk fel az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ permutáció ciklusfelbontását! Számoljuk ki a második, harmadik ill. negyedik hatványát a ciklusfelbontás alapján! Mi az a legkisebb n , amelyre ezen permutáció n -edik hatványa az identitás?
127. Igazoljuk, hogy a következő halmazok S_n -nek generátorrendszerei:
- (a) $\{(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)\}$;
 - (b) $\{(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)\}$;
 - (c) $\{(1\ 2), (1\ 2\ 3 \dots n)\}$.
128. Bizonyítsuk be, hogy a páros permutációk egy részcsoportot alkotnak S_n -ben!
129. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraéder szimmetriacsoportja izomorf S_4 -gyel!
130. Határozzuk meg az S_3 csoport összes részcsoportját. Adjuk meg mindegyikhez a bal és jobb oldali mellékosztályokat.