Bevezetés a számításelméletbe II.

8. gyakorlat, 2007. április 4.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Számelmélet

74. Az $x \equiv 2(3)$ és az $x \equiv 5(6)$ állítások közül melyik következik a másikból? Ami nem következik, arra mutassunk ellenpéldát!
75. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
    (a) $k \mid n,\ a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{k}$
    (b) $k \mid n,\ a \equiv b \pmod{k} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$
    (c) $a \equiv b \pmod{k},\ a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{kn}$
    (d) $a \equiv b \pmod{k},\ a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[k,n]}$
    (e) $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow ka \equiv kb \pmod{kn}$
    (f) $a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{k} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{kn}$
    (g) $a^2 \equiv b^2 \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv \pm b \pmod{n}$
    (h) $a^2 \equiv b^2 \pmod{101} \Leftrightarrow a \equiv \pm b \pmod{101}$
76. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $p + 10$ és $p + 14$ is prím?
77. Mutassunk három olyan relatív prím számot, melyek közül semelyik kettő nem relatív prím.
78. Mely k számokra igaz, hogy tetszőleges k darab pozitív egész szorzata megegyezik legnagyobb közös osztójuk és legkisebb közös többszörösük szorzatával?
79. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan 3 jegyű szám, melynek osztóinak száma osztható volna 11-gyel.
80. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok n-re teljesül, hogy $d(n + 1) \geq 2d(n)$.
81. Bizonyítsuk be, hogy minden a, b egészre $d(ab) \leq d(a)d(b)$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a és b relatív prímek.
82. Bizonyítsuk be, hogy minden a egészre $d(a) \leq 2\sqrt{a}$.
83. Két pozitív egész szám összege prím, az egyik a másik 30-szorosa. Mik lehetnek ezek?
84. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.
85. Maximum hány szám adható meg az $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ halmazból úgy, hogy egyik se legyen osztója semelyik másiknak?
86. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a, m) = 1, (b, m) = 1$ és $ax \equiv b \pmod{m}$ valamint $by \equiv a \pmod{m}$, akkor $xy \equiv 1 \pmod{m}$ is igaz.
87. Oldjuk meg az $5x \equiv 8 \pmod{17}$ kongruenciát.
88. Oldjuk meg a $170x \equiv 78 \pmod{2006}$ kongruenciát.
89. Mely pozitív egész számoknak van ugyanannyi páros osztója, mint páratlan?
90. Biz. tetszőleges n természetes szám mellett $n(n^2 + 5)$ osztható 6-tal.
91. Legyen n páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy n osztóinak átlaga egész szám!
92. Melyik az a legkisebb szám, melynek 10 osztója van? (Csak a pozitív osztókat vesszük figyelembe.)
93. Legyen p prímszám. $\binom{2p}{p} \equiv\ ? \pmod{p}$
94. Oldjuk meg: $15x \equiv 2 \pmod{5}$ és $7x \equiv 1 \pmod{13}$
95. Oldjuk meg: $4x \equiv 2 \pmod{6}$ és $2x \equiv 1 \pmod{5}$
96. Keressük meg az alábbi két számtani sorozat első közös elemét: 30, 50, 70, ...; illetve 12, 25, 38, ...