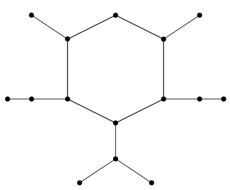
Bevezetés a számításelméletbe II.

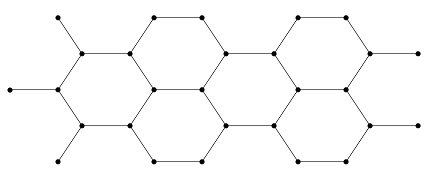
4. gyakorlat, 2007. március 7.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Párosítások, Gallai

40. Egy vállalatnál hét pályázó jelentkezett hat üres munkahelyre, egy ember esetleg több helyre is. Aladár az 1-es, Béla az 1-es és 6-os, Csaba a 2-es, 3-as és 4-es, Dénes a 2-es és 5-ös, Elemér a 3-as, 4-es és 5-ös, Ferenc az 1-es és 6-os végül Géza a 6-os munkahelyre.
    - Ábrázoljuk a helyzetet páros gráffal.
    - Döntsük el, hogy betölthető-e mind a hat munkahely. Ha nem mind, akkor legfeljebb hány tölthető be?
    - Javít-e valamit, ha Ferencnek több pénzt ígérünk, és így elérjük, hogy elfogadja a 2-es munkahelyet?
41. Igaz-e, hogy ha egy összefüggő páros gráfban van Hamilton-kör, akkor van teljes párosítás is? Igaz-e ennek megfordítása?
42. Határozzuk meg az r-reguláris páros gráfok élkromatikus számát.
43. Egy páros gráf egyik pontosztályában van olyan X részhalmaz, melyre $|N(X)| \leqslant |X| - 2$. Bizonyítsuk be, hogy a gráfban nincsen Hamilton-út.
44. Mutassuk meg, hogy egy fának legfeljebb egy teljes párosítása van.
45. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban van két teljes párosítás, akkor létezik benne páros hosszúságú kör is.
46. Legyen a nemnegatív elemű, négyzetes A mátrix olyan tulajdonságú, hogy minden sorában és minden oszlopában a számok összege 1 (amúgy az ilyen mátrixot hívjuk duplán sztochasztikusnak). Mutassuk meg, hogy a determinánsa tartalmaz nemnulla kifejtési tagot.
47. Képzeljünk el egy szigetet, amely fel van parcellázva n darab azonos méretű vadászterületre, valamint n azonos méretű mezőgazdasági területre is (a két parcellázás nem feltétlenül esik egybe). Mutassuk meg, hogy beköltöztethető n lakó úgy, hogy mindenki egy vadászterület és egy mezőgazdasági parcella fölött rendelkezzék, és mindenkhez található legyen olyan szigetdarabka, melyet mindkét tevékenység szempontjából birtokol.
48. Határozzuk meg a független élek maximális számát az alábbi két gráfban. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet többet találni!





49. Az $a_1, a_2 \dots a_{2007}$ csúcsokból álló G gráf a_i és a_j pontja akkor van összekötve, ha $i+j$ osztható 3-mal (és $i \neq j$). Határozzuk meg $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$, $\alpha(G)$, $\omega(G)$ értékét.
50. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geqslant |E(G)|$.
51. Igazoljuk, hogy $\alpha(G) \geqslant n - 2\nu(G)$.
52. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszögmentes G gráfban $\alpha(G) \cdot \tau(G) \geqslant |E(G)|$.
53. Mutassuk meg, hogy $\chi_e(G) + \nu(G) \leqslant e + 1$.
54. Határozzuk meg véges egyszerű G gráfokra a $\frac{\tau(G)}{\nu(G)}$ érték lehető legkisebb és legnagyobb értékét.