Bevezetés a számításelméletbe II.

1. gyakorlat, 2007. február 14.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

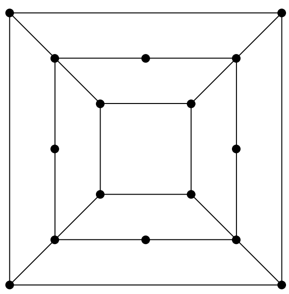
Euler- és Hamilton-bejárások

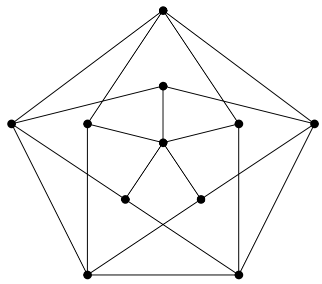
Euler-bejárások

1. Milyen n esetén tartalmaz a teljes n pontú gráf Euler-kört illetve -utat?
2. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van zárt Euler-vonala, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy minden élen pontosan kétszer megyünk át.
4. 20 város némelyike között üzemel légijárat, mindegyik városból 4 másikba lehet közvetlen járattal eljutni. Igazoljuk, hogy a járatok szétoszthatók két légitársaság között oly módon, hogy mindegyik társaság mindegyik városból 2 járatot indítson. (A járatok mindig oda-vissza értendők.)
5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráfban a páratlan fokszámú pontok száma $2k$, akkor a gráf élei bejárhatóak k darab sétával.
6. Egy gráf csúcsai a négy hosszúságú 0–1 sorozatok. Két pont akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő sorozatok pontosan egy helyen térnek el. Található Euler-kör ebben a gráfban?
7. A gráf csúcsai legyenek ugyanazok, mint az előző példában, de most akkor kössük össze őket, ha pontosan két helyen térnek el a sorozatok. A kérdés ugyanaz.

Hamilton-bejárások

8. Van-e Hamilton-kör az alábbi gráfokban?





9. Milyen m és n értékekre tartalmaz Hamilton-kört illetve -utat az $m \times n$ méretű négyzetháló-gráf (amelynek összesen $(m+1) \times (n+1)$ pontja van)?
10. Legyen G olyan, a $V = \{p_1, p_2, ..., p_{2007}\}$ ponthalmazon értelmezett egyszerű gráf, amelyben $\{p_i, p_j\} \in E$ pontosan akkor teljesül, ha $|i - j| \leqslant 2$. Van-e G-ben Hamilton-kör vagy Hamilton-út?
11. Be lehet-e járni huszárral egy 4×4-es sakktáblát?
12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \geq 5$ értékre igaz az alábbi két állítás:
    (a) Létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G is és $\overline{G}$ is tartalmaz Hamilton-kört.
    (b) Létezik olyan n csúcsú gráf, hogy sem G, sem $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört.
13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n + 1$ pontú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n, akkor a gráfban van Hamilton-út.
14. Bizonyítsuk be, hogy a Petersen gráfban (lásd tanszéki póló) nincsen Hamilton-kör.
15. Egy szállodába egy 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal körül ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alkalmával az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy mindenki a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor az összes résztvevő még aznap este haza megy. Bizonyítsuk be, hogy legalább 25 éjszakát a szállodában tölt a társaság!