Bevezetés a számításelméletbe I.

9. gyakorlat, 2006. november 15.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Komplex számok

88. Legyen $x = 1 + 2i$ és $y = 3 + 4i$. Számoljuk ki az alábbi értékeket: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$, y^2, $\overline{y}$, $y \cdot \overline{y}$.

89. Határozzuk meg $\sqrt{5 - 12i}$ kanonikus alakját!

90. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

    (a) $z^2 + 3 = 0$,
    (b) $z^2 = i|z|$,
    (c) $z^2 = iz$,
    (d) $|z| = 2z + i$,
    (e) $z^2 - 5 + 12i = 0$,
    (f) $z^4 - 3z^2 - 1 = 0$,
    (g) $z + \overline{z} = 2\,|z|$,
    (h) $\overline{z} = z^{2004}$,
    (i) $z^2 - 12z + 13 - 4i = 0$.

91. Mi a mértani helye a komplex számsíkon az $\frac{1+ti}{1-ti}$ alakú számoknak, ha t befutja a valós számok halmazát? Ugyanez a kérdés, csak a vizsgálandó kifejezés legyen most $\frac{1+ti}{t+i}$.

92. Mi $|z|$, $|z_1 - z_2|$, iz geometriai jelentése? Milyen számokat kapunk, ha az $a + bi$ komplex számnak megfelelő pontot tükrözzük

    (a) a valós tengelyre,
    (b) a képzetes tengelyre,
    (c) az $y = x$ egyenletű egyenesre?

93. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy z_1, z_2, z_3 egy egyenesbe essenek?

94. Varázsoljuk trigonometrikus alakba az alábbi, kanonikus alakjaikkal megadott komplex számokat: $1 + i$, $5 - 12i$, $\sqrt{3} - i$, $\sin\alpha - i\cos\alpha$.

95. Tekintsük az összes n-edik egységgyököt. Mutassuk meg, hogy ezek szorzata is egységgyök. Mi a feltétele annak, hogy összegük is egységgyök legyen?

96. Van-e a kilencedik egységgyökök között pontosan hat, melyek összege zérus? És pontosan hét?

97. Bizonyítsuk be, hogy a 2004. egységgyökök közül kiválasztható 876, melyek összege 0.

98. Mennyi az n-edik komplex egységgyökök összege, illetve szorzata?

99. Legyen $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$. Mennyi $z^{2004} + z^{-2004}$?

100. Egy paralelogramma minden élére kifelé illesztünk egy négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy ezek középpontja is négyzetet alkot.

101. Egy kör alakú mackósajtos dobozban a 6 darab egyforma körcikk alakú sajtból már csak 3 maradt, úgy, hogy mindhárom sajt csúcsa a doboz középpontjában van, de egyébként tetszőlegesen helyezkednek el. Tekintsük a szomszédos sajtok közötti üres íveket, és mindháromra vegyük az ív végpontjait összekötő egyenes szakasz felezőpontját. Igazoljuk, hogy ez a három pont egy szabályos háromszöget alkot.

102. Hol van a hiba a következő „levezetésben”? $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$