Bevezetés a számításelméletbe I.

8. gyakorlat, 2006. november 8.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Magtér és képtér – Sajátcuccok

79. Adjuk meg a p valós paraméter függvényében a $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2p \\ 1 & p & 2 \end{pmatrix}$ mátrixú lineáris leképezés képterét és magterét.

80. Vizsgáljuk a háromdimenziós tér alábbi transzformációit. Lineárisak-e? Ha igen, írjuk fel a mátrixukat, illetve határozzuk meg a képterüket és magterüket, valamint ezek dimenzióját is.

    (a) az identitás-transzformáció,
    (b) a zérus-transzformáció,
    (c) a z tengely körüli 90 fokos elforgatás,
    (d) az y tengely körüli α szögű elforgatás,
    (e) az x tengelyre való vetítés,
    (f) az y–z síkra való vetítés.

81. A legfeljebb tizedfokú valós együtthatós polinomok körében értelmezett deriválásnak, mint lineáris transzformációnak mi a képtere illetve magtere? Mik a sajátvektorai és sajátértékei?

82. Igazoljuk, hogy bármely A lineáris leképezés esetén tetszőleges $\underline{u}, \underline{v}$ vektorokra $A(\underline{u}) = A(\underline{v})$ akkor és csak akkor igaz, ha $\underline{u} - \underline{v} \in KerA$.

83. Legyen az A mátrix által a V vektortéren megvalósított lineáris transzformáció olyan, hogy $KerA$ tartalmazza ImA-t. Mutassuk meg, hogy ekkor $A^2 = 0$.

84. Keressünk olyan másodrendű valós mátrixot, amelynek négyzete a nullmátrix.

85. Adjuk meg a következő mátrix sajátértékeit, -vektorait és -altereit.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

86. Keressünk olyan 2×2-es, illetve 3×3-as valós mátrixot, melynek nincsen valós sajátértéke.

87. A négyzetes A mátrixra $A = A^3$. Bizonyítsuk be, hogy A-nak van sajátvektora, és sajátértékei csak a -1, 0, 1 lehetnek.