Bevezetés a számításelméletbe I.

6. gyakorlat, 2006. október 18.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Mátrixok inverze, rangja

66. Igaz-e, hogy ha az $n \times n$-es méretű A és B mátrixoknak létezik inverze, akkor AB-nek is létezik? Hogyan számítható ki a szóban forgó $(AB)^{-1}$ mátrix A^{-1} és B^{-1} segítségével?

67. Legyen A egy $n \times n$-es invertálható mátrix, B pedig egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $AB = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor $B = 0$.

68. Egy $n \times n$-es $A \neq 0$ mátrix minden sorában az elemek összege 0. Bizonyítsuk be, hogy A (bal oldali) nullosztó, és adjunk is meg olyan $B \neq 0$ mátrixot, melyre $AB = 0$.

69. Bizonyítandó, hogy ha A és B n-edrendű kvadratikus (vagyis $n \times n$-es négyzetes) felcserélhető (tehát $AB = BA$) és invertálható mátrixok, akkor $A^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$.

70. Az A és B azonos méretű invertálható négyzetes mátrixokra, valamint a velük azonos méretű E egységmátrixra $A^2 = E$ és $ABA^{-1} = B^3$. Bizonyítsuk be, hogy $B^8 = E$.

71. Hány $k \times k$-as aldetermináns található egy $n \times m$-es mátrixban?

72. Bizonyítsuk be, hogy egy mátrix egy elemét megváltoztatva a rang legfejlebb 1-gyel változik.

73. Igaz-e, hogy bármely mátrixban van olyan elem, amelyet alkalmasan módosítva a mátrix rangja megváltozik?

74. Egy 100×100-as $\mathbb{R}$ feletti mátrix rangja 50. Elérhető-e mindig egy alkalmas elem megváltoztatásával, hogy a rang 49-re, illetve 51-re változzon?

75. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját, és – ha van – az inverzét.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 6 & 2 & 10 \\ -9 & -3 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \\ 10 & 1 & -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$$

76. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (egymással összeszorozható) A és B mátrixra $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

77. Legyen A egy tetszőlges $m \times n$-es mátrix, B pedig egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $|B| = 0$. Bizonyítsuk be, hogy $r(AB) < n$.

78. Legyen A egy 6×5-ös mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

    (a) Ha az első 3 sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldetermináns 0.

    (b) Ha a bal felső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első 3 sor lineárisan összefüggő.

    (c) Ha az első 3 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 3 oszlop is lineárisan összefüggő, akkor $r(A) \leq 3$.

    (d) Ha az első 2 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 2 oszlop is lineárisan összefüggő, akkor $r(A) \leq 3$.