Bevezetés a számításelméletbe I.

5. gyakorlat, 2006. október 11.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Vektorok szorzása – Mátrixok

50. Legyen $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, -1, 3)$ és $c = (-1, 2, -3)$. Számoljuk ki az ab, bc és ca skaláris szorzatokat, az $a \times b$, $b \times c$, $c \times a$ és $a \times c$ vektoriális szorzatokat, valamint az abc vegyesszorzatot.

51. Igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két szemköztes élpárja merőleges egymásra, akkor a harmadik is.

52. Számoljuk ki az $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$ és $(3, 1, 3)$ csúcsok által kifeszített tetraéder térfogatát.

53. Két kitérő egyenesen mozog egy-egy adott hosszúságú szakasz. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott tetraéder térfogata nem változik eközben.

54. Végezzünk el sok-sok mátrixszorzást gyakorlásképp!

55. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, x, y pedig n magas oszlopvektorok. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$, akkor $|A| = 0$.

56. Igaz-e, hogy ha A, B és C $n \times n$-es mátrixok, $A \neq 0$, valamint $AB = AC$, akkor $B = C$?

57. Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -I$ egyenlet?

58. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges A négyzetes mátrixra.

    (a) Ha van olyan $k \geqslant 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $|A| = 0$.

    (b) Ha $|A| = 0$, akkor van olyan $k \geqslant 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

59. Mutassuk meg, hogy tetszőleges szigorú felső háromszögmátrixnak valamelyik pozitív egész kitevős hatványa nullmátrix.

60. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amire az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix esetén $AB = BA$ teljesül.

61. Számoljuk ki az alábbi mátrix 2007. hatványát:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

62. A 100×100-as A mátrix főátlójában és a 100. sorában mindenhol 1-es áll, az összes többi eleme 0. Határozzuk meg az A^{100} mátrixot.

63. Tetszőleges valós t és pozitív egész k számra számoljuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k$$

64. Bizonyítsuk be, hogy ha a kvadratikus A mátrixra és a vele azonos rendű E egység- és 0 zérusmátrixra $A^2 + A + E = 0$, akkor A determinánsa nem 0. Számítsuk ki A^{2007}-t.

65. Mutassuk meg, hogy ha A kvadratikus és E ugyanolyan rendű egységmátrix, továbbá valamely k egészre A^k zérusmátrix, akkor $E - A$ invertálható.