Bevezetés a számításelméletbe I.

4. gyakorlat, 2006. október 4.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Determinánsok

37. Határozzuk meg a következő permutációkban az inverziók számát!
(a) $5, 2, 4, 1, 6, 3$ (b) $100, 99, 98, \ldots, 1$ (c) $2, 3, \ldots, 100, 1$

38. Mi a kapcsolat egy permutációnak és a „fordítottjának” az inverziószáma között?

39. Mely n-ekre létezik olyan permutációja az $1, 2, \ldots, n$ számoknak, melyben az inverzióban álló elempárok száma megegyezik az inverzióban nem álló elempárok számával?

40. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát.

$$\begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

41. Hogyan változik egy mátrix determinánsa a főátlóra tükrözéskor? És ha a mellékátlóra tükrözünk?

42. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát. A mátrixok $n \times n$-esek, a nem jelzett elemek értéke pedig 0.
(a) $a_{i,i} = 1$
(b) $a_{i,i} = A$
(c) $a_{i,n+1-i} = 1$
(d) $a_{i,i} = a_{i,i+1} = a_{n,1} = 1, \quad n = 2k$
(e) $a_{i,j} = i + j - 1$
(f) $a_{i,j} = (i + j - 1)^2$
(g) $a_{i,j} = \min(i, j)$
(h) $a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$
(i) $a_{i,j:i+j\leqslant n+1} = a_{n,n} = 1$
(j) $a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = 1, a_{i,i} = 2$

43. Igaz-e, hogy ha egy mátrix minden sorában az elemek számtani sorozatot alkotnak, akkor a mátrix determinánsa 0?

44. Az $n \times n$-es A mátrix minden eleme páros szám. Tudjuk, hogy A determinánsa osztható 64-gyel, de nem osztható 128-cal. Adjuk meg n összes lehetséges értékét.

45. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme ± 1. Igazoljuk, hogy determinánsa osztható 2^{n-1}-nel.

46. Van egy $n \times n$-es mátrixunk, melynek az elemei egy kivételével rögzítettek. Igaz-e, hogy az utolsó elem mindig megválasztható úgy, hogy az így kitöltött mátrix determinánsa 0 legyen?

47. A pontos érték meghatározása nélkül mutassuk meg, hogy az alábbi determináns értéke nem zérus.

$$\begin{vmatrix} 1222 & 1492 & 1956 & 1789 \\ 1456 & 1000 & 1867 & 1686 \\ 1848 & 1945 & 1552 & 1640 \\ 1769 & 1514 & 1918 & 1812 \end{vmatrix}$$

48. Legyen $\mathbf{A}$ egy n sorból és n oszlopból álló mátrix, a k-adik sorának j-edik elemét jelölje a_{kj}. Legyen $\mathbf{B}$ az az $n \times n$-es mátrix, amelyben a k-adik sor j-edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j} a_{kj}$ $(1 \leq k, j \leq n)$. Mennyi $\mathbf{B}$ determinánsa, ha tudjuk, hogy $\mathbf{A}$ determinánsa 1?

49. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme egyjegyű (0–9), így sorai n jegyű nemnegatív egész számokként is olvashatók. Mi több, az így kapott számok mindegyike osztható 2006-tal. Igaz-e, hogy a determinánsa is osztható 2006-tal?