Bevezetés a számításelméletbe I.

2. gyakorlat, 2006. szeptember 20.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Lineáris összefüggőség

17. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat:
    (a) A $\underline{0}$ minden vektorrendszertől függ.
    (b) Egy vektorrendszer függ bármely őt tartalmazó vektorrendszertől.
    (c) Egy egyelemű vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem a $\underline{0}$-ból áll.
    (d) Minden vektorrendszer összefüggő, amely tartalmazza a $\underline{0}$-t.
    (e) Minden vektorrendszer összefüggő, amely egy elemet kétszer tartalmaz.
18. Igazoljuk, hogy egy lineárisan független vektorrendszer tetszőleges részhalmaza is lineárisan független.
19. Igazoljuk, hogy egy lineárisan összefüggő vektorrendszerhez néhány vektort hozzávéve továbbra is lineárisan összefüggő rendszert kapunk.
20. Kifejezhető-e $\mathbb{R}^4$-ben a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorok segítségével?
21. Kifejezhető-e a $\underline{0} \in \mathbb{R}^4$ az előző példában definiált $\underline{v}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével?
22. Lineárisan összefüggők-e az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorok?
23. (a) Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$?
    (b) Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?
24. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, és $\underline{c}$ vektorok egy vektortér elemei, V pedig ennek a vektortérnek egy altere. Továbbá $\underline{a}+\underline{b} \in V$, $\underline{c}+3\underline{a} \in V$, de nem igaz, hogy $\underline{b}+2\underline{c} \in V$. Mutassuk meg, hogy $6\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c} \in V$, de nem igaz, hogy $5\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c} \in V$.
25. Legyenek $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k)$ egy vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i$. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a}_1 \in \langle \underline{x}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \rangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 \neq 0$.
26. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorok és λ skalár egy vektortérben. Elkészítjük az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}-\underline{b}-\underline{c}$, $\underline{b}-\lambda\underline{c}$ vektorokat. Határozzuk meg, hogy a λ skalár mely értékei mellett lesz ez utóbbi három vektor lineárisan független és melyeknél összefüggő.
27. Egészítsük ki az $(1,2,3,4)$, $(0,1,2,5)$, $(2,5,8,10)$ vektorrendszert $\mathbb{R}^4$ egy bázisává.
28. Generátorrendszert alkotnak-e az $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(2,3,4,1)$, $(3,0,1,2)$, $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$ vektorok? Ha igen, válasszunk ki egy bázist belőle.
29. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két, 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme.
30. Legyen a V térnek $a_1, a_2 \ldots a_n$ egy bázisa. Bázist alkotnak-e az alábbi $b_1, b_2 \ldots b_n$ vektorok?

$$\begin{aligned} b_i &= a_i + a_{i+2} \quad \text{ha } i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + a_1 \\ b_n &= a_n + a_2 \end{aligned}$$

31. Az $\underline{a_1}$, $\underline{a_2}$, $\underline{a_3}$ és a $\underline{b_1}$, $\underline{b_2}$, $\underline{b_3}$, $\underline{b_4}$ vektorok ugyanazt a V lineáris teret generálják, vagyis $\langle \underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3} \rangle = \langle \underline{b_1}, \underline{b_2}, \underline{b_3}, \underline{b_4} \rangle$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $\underline{a_1}+\underline{a_2}$, $\underline{a_3}+\underline{b_1}$, $\underline{a_3}+\underline{b_2}$, $\underline{b_3}+\underline{b_4}$.