Bevezetés a számításelméletbe II.

12. gyakorlat, 2006. május 10.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Gyűrűk

114. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt (a szokásos szorzásra és összeadásra nézve):

    (a) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$;
    (b) $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$;
    (c) $\{\frac{a}{3^n} + b : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;
    (d) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, ab = 0\}$;
    (e) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, b$ páros$\}$;
    (f) $\{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, a$ páros$\}$;
    (g) az egész együtthatós polinomok;
    (h) $\{0, 1\}$ a modulo 2 összeadással és szorzással;
    (i) a 4×4-es mátrixok;
    (j) a 4×4-es mátrixok, melyek determinánsa nem nulla, valamint a 4×4-es nulla mátrix.

    A fenti gyűrűk közül melyik egységelemes, melyik kommutatív, mely elemeknek van multiplikatív inverze?

115. Állapítsuk meg, hogy az alábbi struktúrák közül melyik gyűrű. Ha gyűrű, akkor döntsük el, hogy kommutatív, egységelemes illetve nullosztómentes-e. (Ha kommutatív és nullosztómentes, akkor integritási tartománynak hívjuk.) Továbbá ha egységelemes és nullosztómentes is, akkor nézzük meg, hogy ferdetestről, esetleg testről van-e szó.

    (a) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a szokásos összeadással és szorzással;
    (b) A páros számok (általában az m-mel osztható egész számok) a szokásos összeadással és szorzással;
    (c) Az $n \times n$-es mátrixok $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ felett a szokásos mátrixösszeadással és mátrixszorzással;
    (d) A polinomok $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ felett a szokásos polinomösszeadással és polinomszorzással;
    (e) Egy H halmaz részhalmazai, az unió és a metszet műveletekkel;
    (f) Egy H halmaz részhalmazai, a szimmetrikus differencia és a metszet műveletekkel;
    (g) Az adott intervallumon értelmezett folytonos függvények, a képeken végrehajtott összeadással és szorzással;
    (h) Az n-nel vett osztási maradékok, a szokásos összeadással és szorzással;
    (i) A valós számpárok, az elemenkénti összeadással és szorzással.

116. Egy $x \neq 0$ gyűrűelem baloldali nullosztó, ha $\exists y \neq 0$, hogy $xy = 0$. Legyen x_1 és x_2 baloldali nullosztó. Bizonyítsuk be, hogy x_1x_2 is baloldali nullosztó, de $x_1 + x_2$ nem feltétlenül az!

117. Adjunk példát az $n \times n$-es mátrixok gyűrűjében nullosztókra!

118. Legyen az R gyűrűben 0 az additív neutrális elem.

    (a) Lássuk be, hogy tetszőleges a elemre $0a = a0 = 0$;
    (b) Azt is lássuk be, hogy tetszőleges a, b elemekre $(-a)b = -ab$!

119. A az R gyűrű azon elemeiből áll, amelyekre $a * r = r * a$, minden $r \in R$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy A részgyűrűje R-nek!

120. Legyen R egy egységelemes integritási tartomány, és r egy eleme, amelyre $r * r = r$. Lássuk be, hogy ekkor $r = 0$ vagy $r = 1$!