Bevezetés a számításelméletbe II.

10. gyakorlat, 2006. április 26.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Csoportok II.

104. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számhoz található n elemű csoport, és hogy végtelen sok n-re teljesül, hogy az n elemű csoportok izomorfak.

105. A G csoport a, b és c elemei különböznek az e egységtől és $a^3 = b^5 = c^7 = e$. Lássuk be, hogy G-nek legalább 100 eleme van.

106. Hány részcsoportja van a 15 rendű ciklikus csoportnak?

107. Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész szám esetén létezik olyan csoport, amelynek pontosan k darab részcsoportja van!

108. Egy csoport rendje 81 és van olyan eleme, melynek 27. hatványa nem az egységelem. Bizonyítsuk be, hogy a csoport kommutatív.

109. Tekintsünk egy páratlan rendű Abel-csoportot, melyben a műveletet összeadásnak nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy az összes elem összege 0.

110. Írjuk fel az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ permutáció ciklusfelbontását! Számoljuk ki a második, harmadik ill. negyedik hatványát a ciklusfelbontás alapján! Mi az a legkisebb n, amelyre ezen permutáció n-edik hatványa az identitás?

111. Igazold, hogy a következő halmazok S_n-nek generátorrendszerei:

    (a) $\{(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)\}$; (b) $\{(1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\;n)\}$; (c) $\{(1\,2), (1\,2\,3\;\ldots n)\}$.

112. Bizonyítsd be, hogy a páros permutációk egy részcsoportot alkotnak S_n-ben!

113. Határozzuk meg az S_3 csoport összes részcsoportját. Adjuk meg mindegyikhez a bal és jobb oldali mellékosztályokat.