

Bevezetés a számításelméletbe II.

9. gyakorlat, 2006. április 19.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Csoportok I.

93. Félcsoportot alkotnak-e az alábbi R halmazok a \circ műveletre nézve? Melyik csoport? Melyik Abel-csoport?
- (a) A $0 \dots n - 1$ számok a modulo n összeadásra
 - (b) A $0 \dots n - 1$ számok a modulo n szorzásra
 - (c) Az $1 \dots n - 1$ számok a modulo n szorzásra
 - (d) A síkvektorok halmaza $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$
 - (e) $n \times n$ -es mátrixok, $A \circ B = AB$
 - (f) $n \times n$ -es nonszinguláris mátrixok, $A \circ B = AB$
94. Adjuk meg az összes 1, 2, 3, illetve 4 elemű nem izomorf csoport művelettábláját.
95. Értelmezzük az egész számok halmazán az $a \star b = a + b + 1$ képlettel megadott műveletet. Mutasd meg, hogy (\mathbb{Z}, \star) csoport. Milyen korábbról ismert csoporttal izomorf (\mathbb{Z}, \star) ?
96. A G csoport e egységére és x, y elemeire $x^2 = e$ és $xyx^{-1} = y^3$. Bizonyítsuk be, hogy $y^8 = e$.
97. Milyen a szimmetriacsoportja?
- (a) háromszög; (c) téglalap; (e) kocka;
 - (b) paralelogramma; (d) deltoid; (f) tetraéder.
98. Az alábbi következtetések közül melyek teljesülnek minden csoportban?
- (a) $ax = ay \Rightarrow x = y$; (d) $xa = ya \Rightarrow x = y$; (g) $xa = ay \Rightarrow x = y$;
 - (b) $abx = aby \Rightarrow x = y$; (e) $axb = ayb \Rightarrow x = y$; (h) $bx a = ayb \Rightarrow x = y$;
 - (c) $ax = 1 \Rightarrow x = a^{-1}$; (f) $abx = 1 \Rightarrow x = a^{-1}b^{-1}$; (i) $abx = 1 \Rightarrow x = b^{-1}a^{-1}$.
99. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G csoportban minden elem rendje 2, akkor G kommutatív csoport.
100. Lássuk be, hogy ha a és b egy csoport elemei, akkor $a^{-1}ba$ rendje megegyezik b rendjével.
101. Legyen G egy csoport és $a, b \in G$. Ekkor bizonyítsuk be, hogy
- (a) $o(a) = o(a^{-1})$;
 - (b) $o(ab) = o(ba)$;
 - (c) $o(a) = o(b^{-1}ab)$;
 - (d) ha G Abel-csoport, akkor $o(ab) \leq o(a)o(b)$.
102. Legyen G egy csoport, és $G_1 \leq G$, $G_2 \leq G$. Ekkor igaz-e, hogy
- (a) $G_1 \cup G_2 \leq G$;
 - (b) $G_1 \cap G_2 \leq G$?
103. Van-e olyan 20 elemű csoport, amelyben
- (a) van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem; (b) van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?