Bevezetés a számításelméletbe II.

7. gyakorlat, 2006. április 5.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Számelmélet

68. Az $x \equiv 2(3)$ és az $x \equiv 5(6)$ állítások közül melyik következik a másikból? Ami nem következik, arra mutassunk ellenpéldát!
69. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
    (a) $k \mid n,\ a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{k}$
    (b) $k \mid n,\ a \equiv b \pmod{k} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$
    (c) $a \equiv b \pmod{k},\ a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{kn}$
    (d) $a \equiv b \pmod{k},\ a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[k,n]}$
    (e) $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow ka \equiv kb \pmod{kn}$
    (f) $a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{k} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{kn}$
    (g) $a^2 \equiv b^2 \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv \pm b \pmod{n}$
    (h) $a^2 \equiv b^2 \pmod{101} \Leftrightarrow a \equiv \pm b \pmod{101}$
70. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $p+10$ és $p+14$ is prím?
71. Mutassunk három olyan relatív prím számot, melyek közül semelyik kettő nem relatív prím.
72. Bizonyítsuk be, hogy minden a egészre $d(a) \le 2\sqrt{a}$.
73. Két pozitív egész szám összege prím, az egyik a másik 30-szorosa. Mik lehetnek ezek?
74. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.
75. Oldjuk meg az $5x \equiv 8 \pmod{17}$ kongruenciát.
76. Oldjuk meg a $170x \equiv 78 \pmod{2006}$ kongruenciát.
77. Mely pozitív egész számoknak van ugyanannyi páros osztója, mint páratlan?
78. Biz. tetszőleges n természetes szám mellett $n(n^2+5)$ osztható 6-tal.
79. Legyen n páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy n osztóinak átlaga egész szám!
80. Melyik az a legkisebb szám, melynek 10 osztója van? (Csak a pozitív osztókat vesszük figyelembe.)
81. Legyen p prímszám. $\binom{2p}{p} \equiv\ ? \pmod{p}$
82. Oldjuk meg: $15x \equiv 2 \pmod{5}$ és $7x \equiv 1 \pmod{13}$
83. Oldjuk meg: $4x \equiv 2 \pmod{6}$ és $2x \equiv 1 \pmod{5}$
84. Legyen n osztható k-val. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(n)$ is osztható $\varphi(k)$-val.
85. Teljes maradékrendszer-e (modulo 77) az $1, 11, 21, \ldots 761$ számhalmaz?
86. Redukált maradékrendszer-e (modulo 32) az $5, 15, 25, \ldots, 155$ számhalmaz?
87. Keressük meg az alábbi két számtani sorozat első közös elemét: $30, 50, 70, \ldots$; illetve $12, 25, 38, \ldots$
88. Biz. minden n-re $\varphi(n^3) = n^2\varphi(n)$.
89. Mivel kongruens mod 77 az 1998^{1979} szám?
90. Mi $7^{6^{5^{4^{3^2}}}}$ utolsó számjegye a 10-es számrendszerben?
91. Kiszámítandó $(((43^{43})^{43})^{43})^{43}$ modulo 49.
92. Biz. be, hogy a $10^n + 3$ alakú számok között végtelen sok osztható 13-mal.