

Bevezetés a számításelméletbe I.

9. gyakorlat, 2005. november 14.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Számosságok

90. Adjuk meg a következő halmazok számosságát:
- (a) A természetes számok véges részhalmazai.
 - (b) A természetes számok részhalmazai.
 - (c) Azok az $1, a_1, a_2, \dots$ sorozatok, melyekben a szomszédos elemek hányadosa $1/2$ vagy 2 .
 - (d) Azok az x -ből és y -ből álló sorozatok, melyekben csak véges sok y fordul elő.
 - (e) Az egész számokból álló (véges méretű) mátrixok.
 - (f) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek minden koordinátája egész szám.
 - (g) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek a területe egész szám.
 - (h) A síkon egy háromszög belső pontjai.
 - (i) A racionális számokból álló végtelen sorozatok.
91. Hány olyan (x, y) pontpár van a síkon, melyre
- (a) x és y is racionális,
 - (b) x és $x + y$ is racionális,
 - (c) x és xy is racionális,
 - (d) $x + y$ és xy is racionális?
92. Mi az olyan z komplex számok halmazának számossága, amikre teljesül, hogy $z \cdot \bar{z}$ egész szám?
93. Mi a számossága annak a számhalmaznak, melynek elemei azok a számok, melyek felírhatók $a + b\sqrt{k}$ alakban úgy, hogy k pozitív egész, a és b pedig racionális számok?
94. Tekintsük a síkon azon négyzetek halmazát, melyeknek legalább az egyik csúcsa egész koordinátájú. Mennyi ennek a halmaznak a számossága?
95. Adjunk bijekciót (oda-vissza egyértelmű leképezést) az alábbi halmazok között.
- (a) $[0, 1]$ és $(0, 1)$
 - (b) $(0, 1)$ és $(-\infty, \infty)$
 - (c) $(0, \infty)$ és $(-\infty, \infty)$
96. Tekintsük az összes olyan, origóból induló és véges sok lépés után ugyanott véget érő sétát, amelynek minden lépése az x vagy az y tengellyel párhuzamos (pozitív vagy negatív irányú) egységszakasz. Mi a számossága ezen séták halmazának?
97. Egy tengeralattjáró egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, és percenként egyszer felbukkan egész koordinátájú pontokban. Írható-e előre program a tengeralattjáró megsemmisítésére?
98. Egy valós számot nevezzünk *kiszámíthatónak*, ha van hozzá olyan C nyelven írt program, amellyel a tizedesjegyeit meghatározhatjuk (pl. az n bemenetre a program megadja a szám n -edik tizedesjegyét). Mutassuk meg, hogy létezik nem kiszámítható szám. (A feladat éppen arról szól, hogy egy ilyet „megadni” vagy „látni” képtelenség.)
99. Legfeljebb hány 8-as helyezhető el a síkon úgy, hogy ne messék egymást?