Bevezetés a számításelméletbe I.

7. gyakorlat, 2005. október 24.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Mátrixok, rang, inverz

70. Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -I$ egyenlet?

71. Igaz-e, hogy ha az $n \times n$-es méretű A és B mátrixoknak létezik inverze, akkor AB-nek is létezik?

72. Legyen A egy $n \times n$-es invertálható mátrix, B pedig egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $AB = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor $B = 0$.

73. Bizonyítandó, hogy ha A és B n-edrendű kvadratikus (vagyis $n \times n$-es négyzetes) felcserélhető (tehát $AB = BA$) és invertálható mátrixok, akkor $A^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$.

74. Mutassuk meg, hogy tetszőleges szigorú felső háromszögmátrixnak valamelyik pozitív egész kitevős hatványa nullmátrix.

75. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amire az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix esetén $AB = BA$ teljesül.

76. Mutassuk meg, hogy ha A kvadratikus és E ugyanolyan rendű egységmátrix, továbbá valamely k egészre A^k zérusmátrix, akkor $E - A$ invertálható.

77. Adjuk meg az alábbi mátrix 2005. hatványát:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

78. Tetszőleges valós t és pozitív egész k számra számoljuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k$$

79. Bizonyítsuk be, hogy ha a kvadratikus A mátrixra és a vele azonos rendű E egység- és 0 zérusmátrixra $A^2 + A + E = 0$, akkor A nem szinguláris. Számítsuk ki A^{2004}-t.

80. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját, és – ha van – az inverzét.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 6 & 2 & 10 \\ -9 & -3 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \\ 10 & 1 & -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$$

81. Igaz-e, hogy ha A, B és C $n \times n$-es mátrixok, $A \neq 0$, valamint $AB = AC$, akkor $B = C$?

82. Legyen A egy 6×5-ös mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

    (a) Ha az első 3 sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldetermináns 0.

    (b) Ha a bal felső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első 3 sor lineárisan összefüggő.

    (c) Ha az első 3 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 3 oszlop is lineárisan összefüggő, akkor $r(A) \leq 3$.

    (d) Ha az első 2 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 2 oszlop is lineárisan összefüggő, akkor $r(A) \leq 3$.

Extra gyakorlat: csütörtök 15.00, V2 706 !!!