Bevezetés a számításelméletbe I.

5. gyakorlat, 2005. október 10.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Lineáris összefüggőség, lineáris leképezések

44. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat:
    (a) A $\underline{0}$ minden vektorrendszertől függ.
    (b) Egy vektorrendszer függ bármely őt tartalmazó vektorrendszertől.
    (c) Egy egyelemű vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem a $\underline{0}$-ból áll.
    (d) Minden vektorrendszer összefüggő, amely tartalmazza a $\underline{0}$-t.
    (e) Minden vektorrendszer összefüggő, amely egy elemet kétszer tartalmaz.

45. Igazoljuk, hogy egy lineárisan független vektorrendszer tetszőleges részhalmaza is lineárisan független.

46. Igazoljuk, hogy egy lineárisan összefüggő vektorrendszerhez néhány vektort hozzávéve továbbra is lineárisan összefüggő rendszert kapunk.

47. Kifejezhető-e $\mathbb{R}^4$-ben a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorok segítségével?

48. Kifejezhető-e a $\underline{0} \in \mathbb{R}^4$ az előző példában definiált $\underline{v}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével?

49. Lineárisan összefüggők-e az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorok?

50. (a) Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$?
    (b) Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?

51. Generátorrendszert alkotnak-e az $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(2,3,4,1)$, $(3,0,1,2)$, $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$ vektorok? Ha igen, válasszunk ki egy bázist belőle!

52. Tudjuk, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \rangle$. Lineárisan függetlenek-e az $\{\underline{a}, \underline{c}, \underline{e}\}$ vektorok?

53. Adjuk meg a p valós paraméter függvényében a $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2p \\ 1 & p & 2 \end{pmatrix}$ mátrixú lineáris leképezés képterét és magterét.

54. Vizsgáljuk a háromdimenziós tér alábbi transzformációit. Lineárisak-e? Ha igen, írjuk fel a mátrixukat, illetve határozzuk meg a képterüket és magterüket, valamint ezek dimenzióját is.
    (a) az identitás-transzformáció,
    (b) a zérus-transzformáció,
    (c) a z tengely körüli 90 fokos elforgatás,
    (d) az y tengely körüli α szögű elforgatás,
    (e) az x tengelyre való vetítés,
    (f) az y–z síkra való vetítés.

55. A legfeljebb tizedfokú valós együtthatós polinomok körében értelmezett deriválásnak, mint lineáris transzformációnak mi a képtere illetve magtere?

56. Igazoljuk, hogy bármely A lineáris leképezés esetén tetszőleges $\underline{u}, \underline{v}$ vektorokra $A(\underline{u}) = A(\underline{v})$ akkor és csak akkor igaz, ha $\underline{u} - \underline{v} \in KerA$.

57. Legyen az A mátrix által a V vektortéren megvalósított lineáris transzformáció olyan, hogy $KerA$ tartalmazza ImA-t. Mutassuk meg, hogy ekkor $A^2 = 0$.

58. Keressünk olyan másodrendű valós mátrixot, amelynek négyzete a nullmátrix.

59. Legyenek A és B egy vektortér olyan lineáris transzformációi, amelyekre AB az identitás (helybenhagyás). Igaz-e, hogy BA is az identitás?