Bevezetés a számításelméletbe I.

4. gyakorlat, 2005. október 3.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Koordinátageometria, vektorterek

29. Milyen hosszúságú a $(3, 4, 12)$ vektor?

30. A z mely értékei mellett merőleges az $(5, -3, 2)$ és a $(7, 4, z)$ vektor egymásra?

31. Írjuk fel a $(3, 4, 5)$ ponton átmenő, a $3x + y - 3z = 8$ egyenletű síkkal párhuzamos sík egyenletét.

32. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az origón és merőleges a $(2, 3, 4)$ vektorra! Írjuk fel az ezzel párhuzamos, $(1, 1, 1)$ pontot tartalmazó síkét is.

33. Egy sík a koordinátatengelyeket a $(2, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 5)$ pontokban metszi. Írjuk fel az egyenletét.

34. Határozzuk meg az $x + y + z = 5$ egyenletű sík és a $2x - y - 2z = 3$ egyenletű sík metszésvonalának azt a pontját, amelyik az x és az y tengely által meghatározott síkba esik.

35. Határozzuk meg a háromdimenziós térben az $(1, 1, 1)$ és $(2, 2, 4)$ pontokon átmenő egyenes és a $2x + 3y - z = 2$ egyenletű sík metszetét.

36. Határozzuk meg a $3x + 4y + 12z + 25 = 0$ sík és a $(2, 3, 4)$ pont távolságát.

37. Határozzuk meg az $Ax + By + Cz + D = 0$ sík és az (x_0, y_0, z_0) pont távolságát. (A, B, C, D, x_0, y_0 és z_0 valós paraméterek.)

38. Legyen $a = (7, -5, 1)$ és $b = (8, 13, 6)$. Bontsuk fel b-t egy a-val párhuzamos és egy a-ra merőleges összetevőre.

39. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok (a valós számok, mint skalárhalmaz felett)?
    (a) Az összes térvektor,
    (b) az összes $ax + by = c$ alakú egyenlet,
    (c) az összes n-edfokú egyváltozós polinom,
    (d) az összes legfeljebb n-edfokú egyváltozós polinom,
    (e) az összes egyváltozós polinom,
    (f) a folytonos függvények,
    (g) $\{f : f(5) \geq 0\}$,
    (h) $\{f : f(5) = f(8)\}$.

40. A valós számhármasok terében vektorteret alkotnak-e azok az (x_1, x_2, x_3) vektorok, melyekre
    (a) $x_1 = 2x_2 - 3x_3$
    (b) $x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 2$

41. V_1 és V_2 a V vektortér alterei, milyen feltételek mellett lesz
    (a) $V_1 \cap V_2$ altér,
    (b) $V_1 \cup V_2$ altér?

42. Igaz-e, hogy minden véges dimenziós vektortérnek véges sok altere van?

43. Az u, v és w vektorok elemei, W pedig altere egy vektortérnek, továbbá tudjuk, hogy $u + v \in W$, $3u + w \in W$, de $v + 2w \notin W$. Mutassuk meg, hogy $6u + 3v + w \in W$, de $5u + 3v + w \notin W$.