

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. gyakorlat, 2005. szeptember 19.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Komplex számok

11. Legyen $x = 1 + 2i$ és $y = 3 + 4i$. Számoljuk ki az alábbi értékeket: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$, y^2 , \bar{y} , $y \cdot \bar{y}$.
12. Határozzuk meg $\sqrt{5 - 12i}$ kanonikus alakját!
13. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:
 - (a) $z^2 + 3 = 0$,
 - (b) $z^2 = i|z|$,
 - (c) $z^2 = iz$,
 - (d) $|z| = 2z + i$,
 - (e) $z^2 - 5 + 12i = 0$,
 - (f) $z^4 - 3z^2 - 1 = 0$,
 - (g) $z + \bar{z} = 2|z|$,
 - (h) $\bar{z} = z^{2004}$,
 - (i) $z^2 - 12z + 13 - 4i = 0$.
14. Mi $|z|$, $|z_1 - z_2|$, iz geometriai jelentése? Milyen számokat kapunk, ha az $a + bi$ komplex számnak megfelelő pontot tükrözzük
 - (a) a valós tengelyre,
 - (b) a képzetes tengelyre,
 - (c) az $y = x$ egyenletű egyenesre?
15. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy z_1, z_2, z_3 egy egyenesbe essenek?
16. Varázsoljuk trigonometrikus alakba az alábbi, kanonikus alakjaikkal megadott komplex számokat: $1 + i$, $5 - 12i$, $\sqrt{3} - i$, $\sin \alpha - i \cos \alpha$.
17. Tekintsük az összes n -edik egységgyököt. Mutassuk meg, hogy ezek szorzata is egységgyök. Mi a feltétele annak, hogy összegük is egységgyök legyen?
18. Van-e a kilencedik egységgyökök között pontosan hat, melyek összege zérus? És pontosan hét?
19. Bizonyítsuk be, hogy a 2004. egységgyökök közül kiválasztható 876, melyek összege 0.
20. Mennyi az n -edik komplex egységgyökök összege, illetve szorzata?
21. Legyen $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$. Mennyi $z^{2004} + z^{-2004}$?
22. Egy paralelogramma minden élére kifelé illesztünk egy négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy ezek közép-pontja is négyzetet alkot.
23. Egy kör alakú mackósajt dobozban a 6 darab egyforma körcikk alakú sajtból már csak 3 maradt, úgy, hogy mindhárom sajt csúcsa a doboz középpontjában van, de egyébként tetszőlegesen helyezkednek el. Tekintsük a szomszédos sajtok közötti üres íveket, és mindháromra vegyük az ív végpontjait összekötő egyenes szakasz felezőpontját. Igazoljuk, hogy ez a három pont egy szabályos háromszöget alkot.
24. Hol van a hiba a következő „levezetésben”? $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$

Táltos tankör:

kedd 10–12, I.B.134 (tanszék)