Bevezetés a számításelméletbe I.

8–9. gyakorlat, 2004. november 8., 15.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Lineáris leképzések és transzformációk
Sajátdolgok

74. Adjuk meg a p valós paraméter függvényében a $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2p \\ 1 & p & 2 \end{pmatrix}$ mátrixú lineáris leképezés képterét és magterét.

75. Vizsgáljuk a háromdimenziós tér alábbi transzformációit. Lineárisak-e? Ha igen, írjuk fel a mátrixukat, illetve határozzuk meg a képterüket és magterüket, valamint ezek dimenzióját is.
    (a) Az identitás-transzformáció.
    (b) A zérus-transzformáció.
    (c) A z tengely körüli 90 fokos elforgatás.
    (d) Az y tengely körüli α szögű elforgatás.
    (e) Az x tengelyre való vetítés.
    (f) Az y–z síkra való vetítés.

76. A legfeljebb tizedfokú valós együtthatós polinomok körében értelmezett deriválásnak, mint lineáris transzformációnak mi a képtere illetve magtere?

77. Igazoljuk, hogy bármely A lineáris leképezés esetén tetszőleges $\underline{u}, \underline{v}$ vektorokra $A(\underline{u}) = A(\underline{v})$ akkor és csak akkor igaz, ha $\underline{u} - \underline{v} \in KerA$.

78. Legyen az A mátrix által a V vektortéren megvalósított lineáris transzformáció olyan, hogy $KerA$ tartalmazza ImA-t. Mutassuk meg, hogy ekkor $A^2 = 0$.

79. Keressünk olyan másodrendű valós mátrixot, amelynek négyzete a nullmátrix.

80. Legyenek A és B egy vektortér olyan lineáris transzformációi, amelyekre AB az identitás. Igaz-e, hogy BA is az identitás?

81. Adjuk meg a következő mátrix sajátértékeit, -vektorait és -altereit.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

82. Tekintsük a legfeljebb hatodfokú $p(x)$ polinomok vektorterét. Határozzuk meg az ebben a vektortérben értelmezett következő lineáris transzformációk sajátdolgait.
    (a) $f(x) \to 0$
    (b) $f(x) \to f'(x)$
    (c) $f(x) \to xf'(x)$

83. A négyzetes A mátrixra $A = A^3$. Bizonyítsuk be, hogy A-nak van sajátvektora, és sajátértékei csak a -1, 0, 1 lehetnek.

84. Tekintsük azt a lineáris transzformációt, amely a négydimenziós tér bázisvektorait ciklikusan egymásba viszi át. Mik ennek a transzformációnak a sajátdolgai?

85. Számítsuk ki A^k jobboldali sajátértékeit és sajátvektorait minden $1 \le k \le n-1$ esetére, ha A-ra teljesül, hogy $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$.