Bevezetés a számításelméletbe I.

1. gyakorlat, 2004. szeptember 13.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Vegyes feladatok

1. Helyezzünk el minél több azonos tisztet a sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást. (Ez figuránként külön feladat.)
2. Két pohár közül az egyikben víz, a másikban ugyanannyi bor van. Áttöltünk valamennyi vizet a boros pohárba, majd az abban lévő folyadékból visszatöltünk ugyanennyit a vizet tartalmazóba. Miből lesz több: vízből az eredetileg boros pohárban, vagy borból az eredetileg vizesben?
3. 13 pénzérme közül az egyik hamis, súlya eltér a többi súlyától. Válasszuk ki a hamisat egy súlykészlet nélküli kétkarú mérleg segítségével három méréssel.
4. Legalább hány embert kell kiválasztani ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük kettő, akinek ugyanannyi foga van? És ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük kettő, akinek ugyanolyan a fogazata?
5. A végtelen négyzethálós papíron kijelöltünk száz mezőt. Igazoljuk, hogy ezek közül ki lehet választani 25-öt, melyeknek páronként nincs közös pontjuk.
6. Bizonyítsuk be, hogy egy hatfős társaságban van három ember, akik vagy mind ismerik egymást, vagy pedig egyikük sem ismeri a másik kettő egyikét sem. (Az ismeretség kölcsönös.)
7. A tér egy pontját rácspontnak nevezzük, ha mindhárom koordinátája egész szám. Mutassuk meg, hogy bármely 9 rácspont közül van kettő, amelyek által meghatározott szakasz felezőpontja is rácspont.
8. Egy dobozban 51 piros, 62 zöld és 30 sárga golyó van. Hányat kell (csukott szemmel) kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük
   a) legalább két különböző?
   b) legalább három piros?
   c) legalább két azonos?
9. Egy sakktábla két átellenes sarkát lecsippentettük. Lefedhető-e az így maradt tábla 31 darab 2×1-es dominóval?
10. Adott a síkon végtelen sok pont. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok különböző távolság lép fel köztük.
11. Fogalmazzuk meg a következő állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó: „Minden asszony életében van egy pillanat, hogy (=amikor) szeretne olyat tenni, amit nem szabad."
12. Kör alakú mély tóban úszkál egy hittérítő. A tó partján megjelenik egy úszni nem tudó kannibál, aki a parton négyszer olyan gyorsan tud futni, mint ahogy a hittérítő úszik. Viszont a szárazföldön a hittérítő sokkal jobb futó, mint a kannibál. El tud-e menekülni a hittérítő az őt üldöző kannibál elől? (Ha igen, hogyan; ha nem, miért nem?) $(\star)$
13. n rabló talál por alakú aranyat. Ezen szeretnének mérleg és egyéb segédeszköz nélkül osztozkodni. Fontos, hogy egyikük se érezhesse úgy, hogy önhibáján kívül kevesebbet kapott a kincs n-edrészénél. Két rablóra ismert a módszer: egyik oszt, másik választ. Vajon mi a helyzet $n > 2$ esetén? $(\star)$

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék:
I.B.132
http://www.cs.bme.hu/

BSz Fan Club:
http://www.cs.bme.hu/~zoli/bszfc/