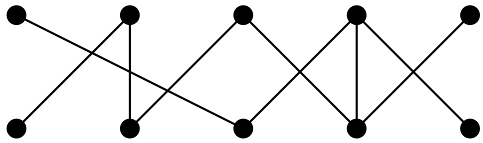
SzA IX. gyakorlat, 2013. november 5/7.

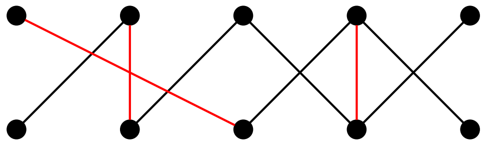
Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Görög betűk

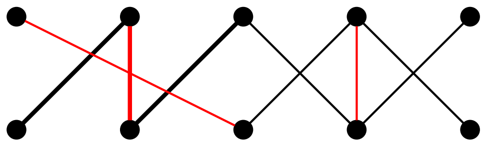
1. **Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban az alternáló utas módszerrel!**



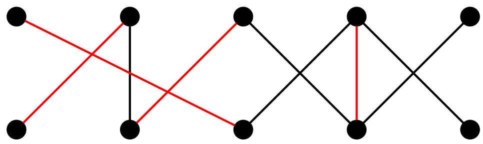
Először tippelünk egy szimpatikus párosítást:



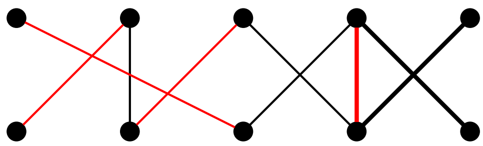
Itt keresünk egy alternáló utat (vastagon):



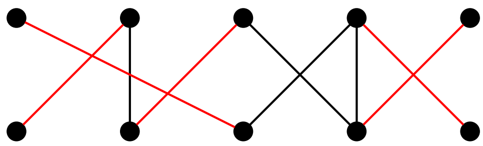
Megcseréljük benne az élek párosítottságát, ezzel növeltük a párosítást:



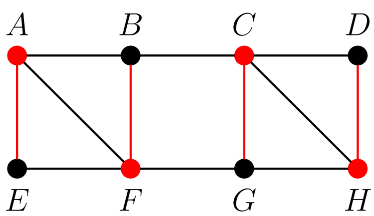
Ezután megint alternáló utat keresünk:

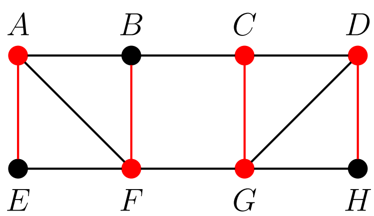


Ezzel egy teljes párosításunk lesz, így biztos, hogy nem kell tovább keresni:



2. **Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefogó ponthalmazt a következő gráfokban!**





$\{(A,E),(B,F),(C,G),(D,H)\}$ mindkét gráfban teljes párosítás, így maximális független élhalmaz is. A bal oldalon $\{A,C,F,H\}$ egy lefogó ponthalmaz, és minimális is, mivel $\tau \geq \nu$. A jobb oldalon $\{A,E,F\}$ és $\{D,G,H\}$ közül egyenként legalább 2, összesen tehát legalább 4 csúcsot ki kell választani, és ekkor még biztos, hogy ki fog maradni él (B,C), így $\tau \geq 5$. $\{A,C,D,F,G\}$ viszont pont jó is.

3. **Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!**
A teljes páros gráfban a kisebbik csúcsszámú osztályt lefedő párosítás biztos létezik, ennél nagyobb nem is lehet, így $\nu(G) = \min\{n,m\}$. König tétele értelmében $\nu(G) = \tau(G)$, ezért $\tau(G) = \min\{n,m\}$. Gallai tétele miatt $\alpha(G) = |V| - \tau(G) = (n+m) - \min\{n,m\} = \max\{n,m\}$. Ismét König tétele alapján $\rho(G) = \alpha(G) = \max\{n,m\}$.

4. **A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!**
Tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G)$, és egy teljes párosítás esetén $\nu(G) = n/2$. Ebből $678 = \tau(G) \geq \nu(G) = 1000$ ellentmondás, tehát nem lehet a gráfban teljes párosítás.

5. **Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n-1$, akkor $G = K_n$!**
Tfh mégsem teljes gráf, vagyis $\exists u,v \in V : (u,v) \notin E$. Ha minden csúcsot beválasztunk u-n és v-n kívül a lefogó pontok közé, akkor több csúcsra már nincs is szükségünk, hiszen az u-ba és v-be futó összes él is le van fogva a másik végpontja által (és természetesen a gráf összes többi éle is), ezt csak egy u-hoz vagy v-hez tartozó hurokél tudná elrontani, ami nincs. Így kiderült, hogy $\tau(G) \leq n-2$, ami ellentmond a feltételnek.

---

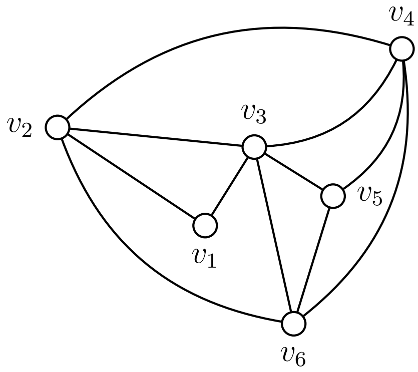
6. **[ppZH 2010. ősz] Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű G gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a $\nu(G)$ és a $\rho(G)$ értéke is megváltozik ennek hatására.**
Gallai idevágó tétele szerint ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$. (3 pont)
Ennek megfelelően ha olyan 10 pontú gráfot találunk, aminek nincs izolált pontja, és amihez úgy lehet egy élt hozzáadni, hogy a $\nu(G)$ megváltozzon, akkor $\rho(G)$ is változni fog, tehát teljesülni fog a feladatban leírt tulajdonság. (3 pont)
Ilyen gráf pl. a 10 pontú csillag (az a 10 csúcsú fa, aminek 9 levele van), mert ebben a gráfban $\nu = 1$, de tetszőleges újabb élt behúzva $\nu = 2$ lesz. (4 pont)

Természetesen az is tökéletes megoldás, hogy egy konkrét gráfról és hozzáadott élről konkrétan megmutatjuk (Gallai nélkül), hogy a ν és a ρ is változik.

Megjegyzés by DM: természetesen nem csak a példaként hozott gráfra jár a pont; mindenki adhat az ízlésének megfelelőt, ami teljesíti a feltéltelt.

7. **A $V = \{2, 3, \ldots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V,E)$ gráfot úgy, hogy $(x,y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$ ($a \nmid b$: a nem osztója b-nek)! Van-e G-ben teljes párosítás?**
Igen, van. A szomszédos számok relatív prímek, így fut közöttük él. A $(2,3),(4,5)\ldots(2006,2007)$ pont egy teljes párosítás lesz.

8. **[ppZH 2011. december 14.] Legyen a $G = (V,E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_i v_j : \frac{i+j}{i-j} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereket.**
A mellékelt ábrán látható a kérdésben szereplő gráf egy diagramja. (3 pont)

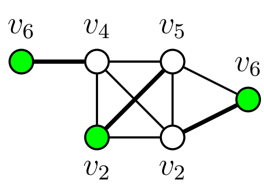


Mivel G-ben sem izolált pont, sem hurokél nincs, ezért Gallai tételei miatt $\nu(G) + \rho(G) = \alpha(G) + \tau(G) = 6$. (1 pont)
Mivel v_1v_2, v_3v_5 és v_4v_6 teljes párosítást alkot, ezért $\nu(G) = 3$ (2 pont)
és (Gallai miatt) $\rho(G) = 3$. (1 pont)
Másrészt a v_1, v_2 ill. a v_3, v_4, v_5, v_6 pontok klikket alkotnak, így egy független ponthalmaz közülük legfeljebb egyet-egyet tartalmazhat. Ezek szerint $\alpha(G) \leq 2$. (1 pont)
Mivel $\{v_1, v_5\}$ független ponthalmaz, ezért $\alpha(G) = 2$, (1 pont)
így Gallai miatt $\tau(G) = 4$. (1 pont)

9. **Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!**
Egy páros gráfban a két pontosztály közül az egyik csúcsszáma mindig $\geq n/2$. Az egy osztályba tartozó csúcsok között biztos nem megy él, ezért egy osztály összes csúcsa független, és ha a nagyobb csúcsszámú osztályt vesszük, pont az állítást kapjuk.

10. **[ZH 2009. október 19.] Legyen G az a gráf, mely hét darab egyenként 287 pontú teljes gráf pontdiszjunk egyesítése. Határozzuk meg az $\alpha(G), \tau(G), \rho(G), \nu(G)$ értékeket!**
A gráfunk úgy néz ki, hogy egymás mellé lerajzolunk 7 db K_{287}-et. Innen az egyes értékeket elég egy K_{287}-re kiszámolni, majd mindegyiket megszorozni 7-tel (némi indoklás kíséretében). A számok kitalálását mindenkinek a fantáziájára bízom.

11. **[ZH 2012. november 22.] Legyenek $v_2, v_3, \ldots, v_7$ a G egyszerű gráf csúcsai, és pontosan akkor fusson v_i és v_j között él, ha $i^2 - 1$-nek és $j^2 - 1$-nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, számítsuk ki a G-ben található független élek ill. független csúcsok maximális számát ($\nu(G)$-t és $\alpha(G)$-t), valamint a G-t lefogó pontok ill. élek minimális számát ($\tau(G)$-t és $\rho(G)$-t).**



Az ábra a feladatban leírt gráfot mutatja. (3 pont)
Gallai tételei szerint, ha G-ben nincs sem hurokél, sem izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)| = \alpha(G) + \tau(G)$. (2 pont)
A vastagon kihúzott élek G egy teljes párosítását alkotják, így $\nu(G) = 3$, (1 pont)
és a Gallai tétel miatt $\rho(G) = 6 - 3 = 3$. (1 pont)
A satírozott 3 csúcs G egy független ponthalmaza, (1 pont)
ráaadásul ennél több független csúcs nincs G-ben, hisz a v_2, v_4, v_5, v_7 csúcsok alkotta klikk 4

csúcsából legfeljebb egy lehet a független ponthalmazban, azaz tetszőleges független ponthalmaz G-nek legalább 3 csúcsát nem tartalmazza. Tehát $\alpha(G) = 3$. (1 pont)
A Gallai tétel miatt $\tau(G) = 6 - 3 = 3$. (1 pont)

12. **A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!**
A Dirac-tétel miatt a gráfban van Hamilton-kör, és mivel páros csúcsa van a gráfnak, a Hamilton-kör minden második élét kiválasztva egy teljes párosítást kapunk, vagyis $\nu(G) = 2n/2 = n$. Gallai tétele szerint pedig (amit nyugodtan alkalmazhatunk, hiszen nem lehet izolált pontja) $\rho(G) = |V| - \nu(G) = 2n - n = n$.

13. **Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!**
Tudjuk, hogy a fentiek miatt $\nu(G) = n$, viszont azt is tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G) = n$.

14. **Tegyük fel, hogy a G gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb m szám, amire teljesül, hogy G-hez hozzá lehet venni m (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?**
A páros körök nem számítanak, bennük biztos, hogy van teljes párosítás. Ha páratlan darab páratlan kör van a gráfban, akkor összesen páratlan sok csúcs van, így ekkor nincs ilyen m szám. Ha páros sok páratlan kör van, akkor mindegyikben csináljunk egy maximális párosítást, így mindegyikben pont egy csúcs fog párosítatlanul maradni. Számozzuk meg ezeket a kimaradt csúcsokat $1 \dots p$-ig (p legyen a páratlan körök száma), és vegyünk fel éleket így: $(1, 2), (3, 4) \dots (p-1, p)$. Így már lesz teljes párosítás, felesleges élet nem vettünk fel, és $m = p/2$.

15. **Egy G összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy G-ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)**
Tfh van egy ilyen tulajdonságú gráfunk, mégis van benne elvágó él. A gráf csúcsainak száma páratlan, mert egy pontot elhagyva egy olyan gráfot kapunk, amiben van teljes párosítás, így páros sok csúcsa van. Nézzünk most egy elvágó élet! Ez az él nyilván két komponensre osztja a gráfot, az egyiknek páros, a másiknak páratlan sok csúcsa van. Hagyjuk most el ennek az élnek azt a csúcsát, amelyik a páros csúcsszámú komponenshez tartozik! A gráf így két összefüggő komponensre esik szét, mindkettőnek páratlan sok csúcsa van. Ebben kellene léteznie teljes párosításnak, de ez lehetetlen, mert ehhez a két komponens között is futnia kellene élnek.

16. **Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$! $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.**
Egy v csúcs pontosan $d(v)$ élet tud lefogni, és ha T egy minimális lefogó csúcshalmaz, akkor

$$\sum_{v \in T} d(v) \geq |E|,$$

hiszen T csúcsai az összes élet lefogják (lehet, hogy egy élet több csúcs is). Ha a bal oldalon a fokszámokat helyettesítjük a maximális fokszámmal, akkor a kifejezés értéke biztos nem csökken, tehát

$$\sum_{v \in T} \Delta(G) \geq \sum_{v \in T} d(v) \geq |E|,$$

viszont itt pontosan $|T| = \tau(G)$-szer adtuk össze $\Delta(G)$-t, vagyis $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$.

17. **Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban** $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$**!**
Mivel G-ben nincs háromszög, egy tetszőleges csúcs szomszédai egy független halmazt alkotnak. Így bármely fokszám legfeljebb $\alpha(G)$ lehet, azaz $\alpha(G) \geq \Delta(G)$ miatt $\alpha(G)\tau(G) \geq \Delta(G)\tau(G) \geq |E|$ az előző feladat eredményét felhasználva.